

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 3h

COEFFICIENT : 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$ est égale à

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ est égale à

a) 2

b) 1

c) $\frac{1}{2}$.

3) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ pour

a) $k = \frac{1}{2}$

b) $k = 2$

c) $k = -2$.

Exercice 2 (4 points)

1) a) Vérifier que $(5 + 2i)^2 = 21 + 20i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 - 4i)z - 3 - 15i = 0$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, A' et B' les points d'affixes respectives $-3i$, $5 - i$, -3 et $1 + 5i$.

2) a) Placer les points A, B, A' et B'.

b) Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3) Soit M un point de la droite (AB) d'affixes z_M .

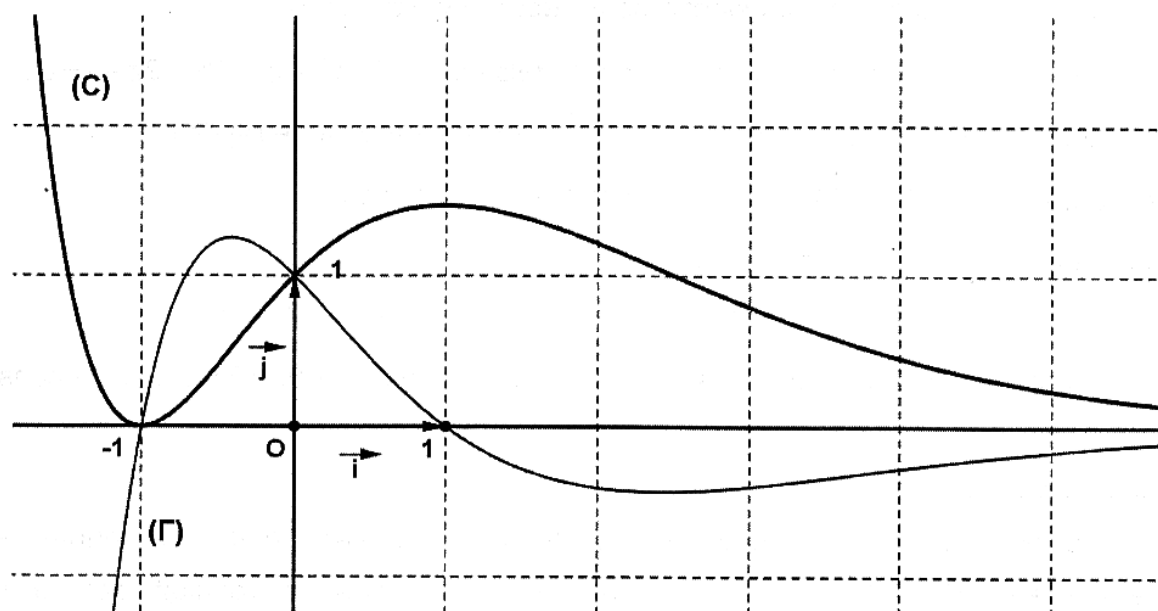
a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k - 3)i$.

b) Montrer que les droites (OM) et (A'B') sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment [AB].

Vérifier que dans ce cas $A'B' = 2 OM$.

Exercice 3 (6 points)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f' .



- 1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f' .
- 2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- 3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$.

- 1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2e - 5$.
 b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
- 2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
 a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1,41 < \alpha < 1,42$.
 c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha(1 - \alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 4 (4 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$ et $C(1, -1, 1)$.

- 1) a) Déterminer $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\mathcal{P}$.
b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x + y + z - 1 = 0$.
- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.
b) Montrer que $S \cap \mathcal{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.
- 3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.
b) Soit α un réel et soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(\alpha, 0, 2 - \alpha)$.

Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Exercice 5 (3 points)

Pour étudier la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé on a mesuré, à divers instants t , le nombre x de bactéries par millilitre. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant, où t est exprimé en heures et x est exprimé en milliers.

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2

On pose $y = \ln x$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

- 1) a) Recopier et compléter le tableau suivant (on donnera pour y les valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	1	2	3	4	5	6
y = ln x	2,20	2,42					3,59

- b) Déterminer le coefficient de corrélation de la série (y,t).
- 2) a) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite D de régression de y en t. (on arrondira les coefficients à 10^{-2} près).
b) A partir de l'équation de D, déterminer l'expression de x en fonction de t.
c) Donner une estimation du nombre de bactéries par millilitre pour $t = 10$.