

SECTION : **SCIENCES EXPERIMENTALES**

EPREUVE : **MATHEMATIQUES**

DUREE : 3 h

COEFFICIENT : 3

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Le nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ a pour argument

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C, et D d'affixes respectives -1, $1+2i$, 3, et $-3i$. Alors on a

- a) les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ;
b) le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ;
c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3) L'équation différentielle $y' = 2y + 1$ admet pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

- a) $f(x) = ke^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$; c) $f(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le graphique ci-contre :

Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

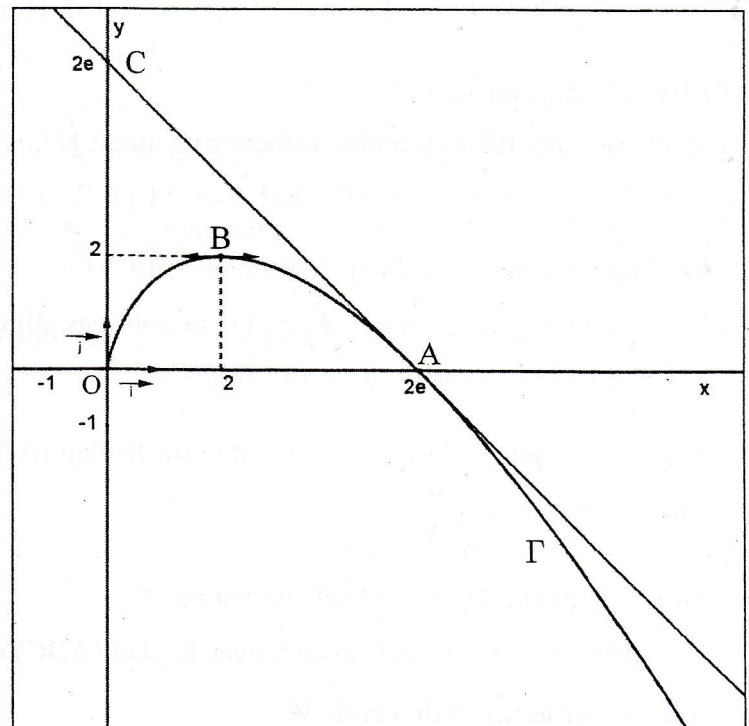
- Les points O, A et B appartiennent à Γ .
- La droite (AC) est la tangente à Γ au point A.
- Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

1) Par une lecture graphique :

- a) Déterminer $f(0)$, $f(2)$, $f(2e)$, $f'(2)$ et $f'(2e)$.
b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
c) Justifier que la restriction g de f à

l'intervalle $[2, +\infty[$ admet une fonction

réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1} .



- 2) On admet que g est définie par $g(x) = x(1 + \ln 2 - \ln x)$, pour tout $x \geq 2$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g et par $\mathcal{C}'$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Tracer, les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

- 3) Soit D la partie du plan limitée par les axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ et les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

a) Hachurer D .

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_2^{2e} g(x) dx = e^2 - 3$.

c) Calculer l'aire de D .

EXERCICE 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{e^k} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} + \dots + (-1)^n \frac{n}{e^n}$.

- 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $(2n+2) - e(2n+1) < 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}} [(2n+2) - e(2n+1)].$$

En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

- 2) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante.

- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_{2n} > u_{2n+1}$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.

- 4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $u_3 < \alpha < u_2$.

EXERCICE 4 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

- 2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .

Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.

- 3) Soit S la sphère de centre O et passant par A .

a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H .

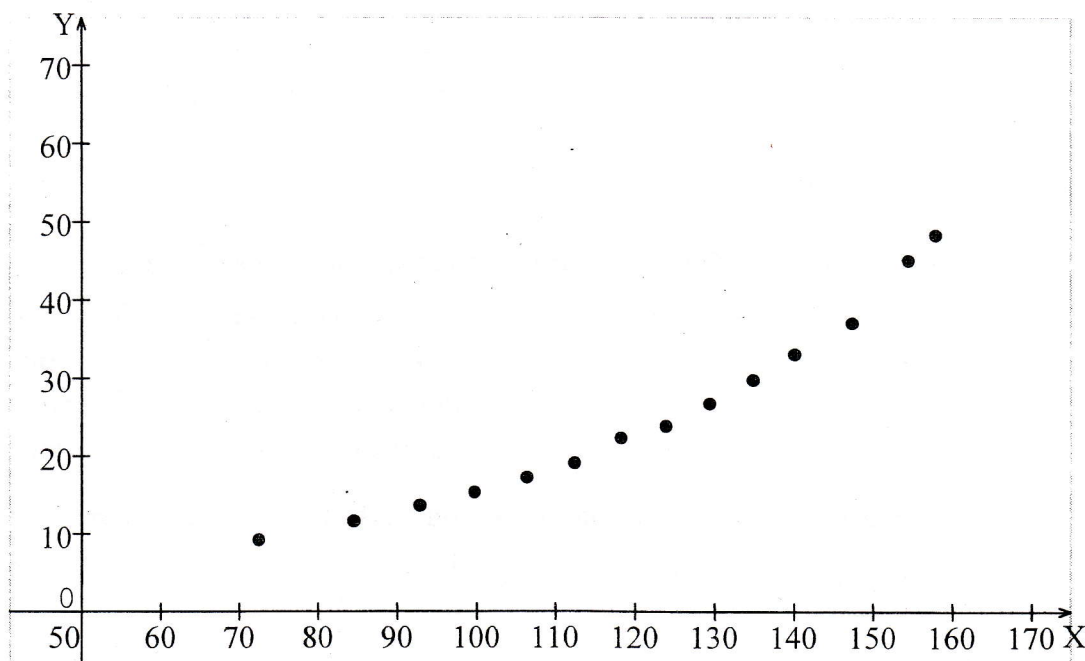
b) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 5 (4 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour des filles entre 1 et 14 ans, la taille moyenne X (en centimètres) et le poids moyen Y (en kilogrammes) :

Âge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	72,5	84,5	92,8	99,7	106,4	112,4	118,2	123,9	129,4	134,8	140,1	147,4	154,4	157,9
Y	9,2	11,6	13,6	15,3	17,2	19	22,3	23,8	26,7	29,7	33	37	45	48,3

- 1) On a représenté le nuage de points de la série (X, Y) dans la figure ci-dessous.
Indiquer si le nuage de points justifie la recherche d'un ajustement affine entre les variables X et Y .



- 2) a) Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X .
b) Calculer la moyenne $\bar{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y .
c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X, Y) .
- 3) On admet qu'il existe un ajustement de la série (X, Y) donné par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2,1463 e^{0,0197x}$ et on suppose que cet ajustement reste valable pour les filles jusqu'à l'âge de 17 ans.
Estimer le poids moyen des filles de 17 ans ayant une taille moyenne égale à 165 centimètres.