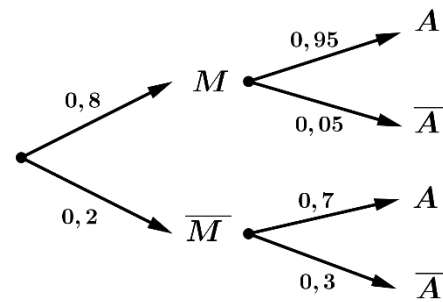


❖ Exercice 1 ► 3 points

- 1) a) ◆ $p(M) = 0.8$
 ◆ $p(A / M) = 0.95$
 ◆ $p(A / \bar{M}) = 0.7$



- 1) b) ◆ $p(A) = p(M \cap A) + p(\bar{M} \cap A) = p(M) \times p(A / M) + p(\bar{M}) \times p(A / \bar{M})$
 $p(A) = 0.8 \times 0.95 + 0.2 \times 0.7 = 0.9.$

- 1) c) ◆ $p(\bar{M} / \bar{A}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(\bar{M}) \times p(\bar{A} / \bar{M})}{p(\bar{A})} = \frac{0.2 \times 0.3}{1 - 0.9} = \frac{0.06}{0.1} = 0.6$

- 2) a) ◆ X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = p(A) = 0.9$
 Alors l'espérance mathématique de X est $E(X) = n \cdot p = 10 \times 0.9 = 9$

- 2) b) ◆ $p(X = 9) = C_{10}^9 \times (0.9)^9 \times (0.1) = 10 \times (0.9)^9 \times (0.1) = (0.9)^9$

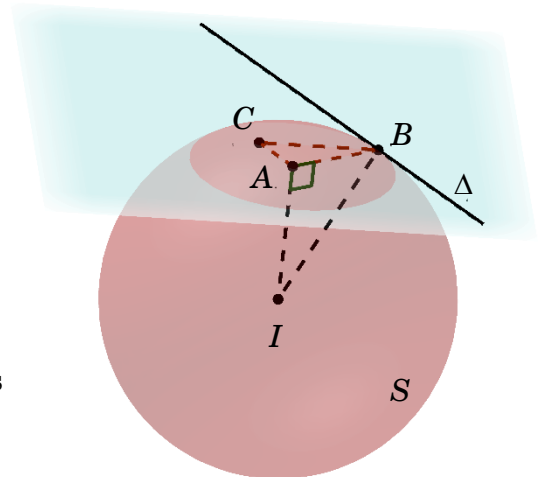
- 2) c) ◆ La probabilité qu'au plus un accouchement se déroule avec au moins une complication :
 ► $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = (0.9)^9 + (0.9)^{10} \approx 0.74$

❖ Exercice 2 ► 4.5 points

- 1) a) ◆ $A(1,2,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(1,1,2)$ et $I(-1,0,-1)$

► $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
 d'où A, B et C ne sont pas alignés
 ainsi les points A, B et C déterminent un plan P .



- 1) b) ◆ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $P = (ABC)$
 alors $P : 2x + 2y + 2z + d = 0$ et comme $A(1,2,1) \in P$ alors $d = -8$
 d'où $P : 2x + 2y + 2z - 8 = 0$ ainsi $P : x + y + z - 4 = 0$

- 1) c) ◆ L'aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 4} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$



2) a) ♦ Δ la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

♦ Soit $\vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P .

► Comme $\vec{u} \cdot \vec{N} = 0 + 1 - 1 = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{N}$ donc $\Delta // P$ et comme $B \in \Delta$ et $B \in P$
Ainsi la droite Δ est incluse dans le plan P .

2) b) ♦ $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{IB} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{► } d(I, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{IB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{36+0+0}}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

3) a) ♦ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 + (z+1)^2 - 1 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 18 = (3\sqrt{2})^2$$

Ainsi S est la sphère de centre $I(-1, 0, -1)$ et de rayon $R = 3\sqrt{2}$.

3) b) ► $d(I, P) = \frac{|-1+0-1-4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$; $((2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$)

alors S et P sont sécants suivant le cercle $\mathcal{C}$:

✓ $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{N}$ et $A \in P$ alors A est le projeté orthogonal de I sur P donc $\mathcal{C}$ est de centre A .

✓ $IB = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = R$ alors $B \in S$ et comme $B \in P$ alors $B \in S \cap P = \mathcal{C}$.

Donc le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon $r = AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

3) c) ♦ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

► $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 + 1 - 1 = 0$ alors $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$

► $\begin{cases} \Delta \subset P \\ \mathcal{C} \subset P \\ B \in \Delta \cap \mathcal{C} \end{cases}$

Ainsi la droite Δ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point B .



❖ Exercice 3 ▶ 4.5 points

1) a) $(E): z^2 - (3\sqrt{3} + i)z + 6 + 2\sqrt{3}i = 0$

♦ $(\sqrt{3} - i)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times i + (i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 1 = 2 - 2\sqrt{3}i.$

1) b) ♦ $\Delta = (3\sqrt{3} + i)^2 - 4(6 + 2\sqrt{3}i) = 27 + 6i\sqrt{3} - 1 - 24 - 8\sqrt{3}i = 2 - 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3} - i)^2$

donc une racine carré de Δ est $\delta = \sqrt{3} - i.$

d'où ▶ $z_1 = \frac{3\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

▶ $z_2 = \frac{3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$

Ainsi $S_C = \{2\sqrt{3}, \sqrt{3} + i\}$

2) a) ♦ $a = \sqrt{3} + i$, $b = 2i$, $c = 2\sqrt{3}$ et $d = (1 + \sqrt{3})(1 + i)$

$\frac{b+c}{2} = \frac{2i+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i = a$ alors A est le milieu du segment $[BC].$

2) b) ▶ $a = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$

▶ Construire les points A et C . (Annexe)

3) a) ♦ $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon $R = 2.$

▶ $AD = |d - a| = |(1 + \sqrt{3})(1 + i) - (\sqrt{3} + i)| = |1 + i + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2 = R$

Ainsi le point $D \in \mathcal{C}.$

3) b) ▶ $\left. \begin{array}{l} b - c = 2i - 2\sqrt{3} \\ 2i(d - a) = 2i(1 + i + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i) = 2i(1 + i\sqrt{3}) = 2i - 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow b - c = 2i(d - a).$

▶ $b - c = 2i(d - a) \Rightarrow \frac{b - c}{d - a} = 2i \Rightarrow \frac{z_{CB}}{z_{AD}} = 2i \in i\mathbb{R} \Rightarrow (AD) \perp (BC).$

3) c) ▶ Construire le point D . (Annexe)

4) a) ▶ $M(z) \in \mathcal{C}_{(A,2)} \Rightarrow AM = |z - a| = 2 \Rightarrow |z - a|^2 = 4.$

▶ $|z - a|^2 = 4 \Rightarrow (z - a)(\overline{z - a}) = 4 \Rightarrow (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4 \Rightarrow z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a} = 4$
 $\Rightarrow z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + \underbrace{|a|^2}_4 = 4 \Rightarrow z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} = 0 \Rightarrow z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z$

4) b) ♦ $z = r e^{i\theta}$; $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

▶ $z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z \Rightarrow |z|^2 = a r e^{-i\theta} + \bar{a} r e^{i\theta} \Rightarrow r^2 = r \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\theta} + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} e^{i\theta} \right)$
 $\Rightarrow r = 2 \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} + e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right) \Rightarrow r = 2 \left(2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right) \Rightarrow r = 4 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right).$



4) c) $\blacktriangleright d = (1 + \sqrt{3})(1 + i) = (1 + \sqrt{3})\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (1 + \sqrt{3})\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\frac{\pi}{4}}.$

$\blacktriangleright D \in \mathcal{C}$ et $d \neq 0 \xrightarrow{4) b)} d = 4 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\theta} = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$

Alors $4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$

5) $\blacklozenge$ Soit $\arg(h) \equiv \alpha [2\pi].$

$\checkmark H \in \mathcal{C}$ et $h \neq 0 \xrightarrow{4) b)} |h| = 4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \quad \checkmark H \in \mathcal{C}_{(O, OD)}$ alors $|h| = OD = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

$\blacktriangleright$ Alors $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ \alpha \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{cases}$

Comme $h \neq d$ et $|h| = |d|$ alors $\arg(h) \neq \arg(d)$ ainsi $\arg(h) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi].$

❖ Exercice 4 $\blacktriangleright$ 7.5 points

A) 1) a) $f(x) = x - \frac{1}{x} + e^{x-1} ; x \in]0, +\infty[$

$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{x}_0 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} + \underbrace{e^{x-1}}_{e^{-1}} \right) = -\infty.$

$\blacklozenge$ La droite $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

A) 1) b) $\blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_0 + \underbrace{e^{x-1}}_{+\infty} \right) = +\infty$

$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x} + e^{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_0 + \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} \underbrace{e^{-1}}_{>0} \right) = +\infty.$

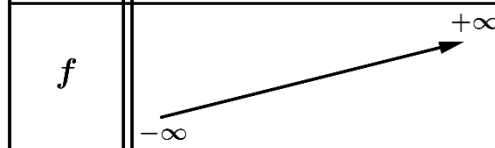
$\blacklozenge (\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

A) 2) a) $\blacklozenge f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[:$

$\blacktriangleright f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + e^{x-1} > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

A) 2) b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		$+\infty$




A) 3) a) ♦ f est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

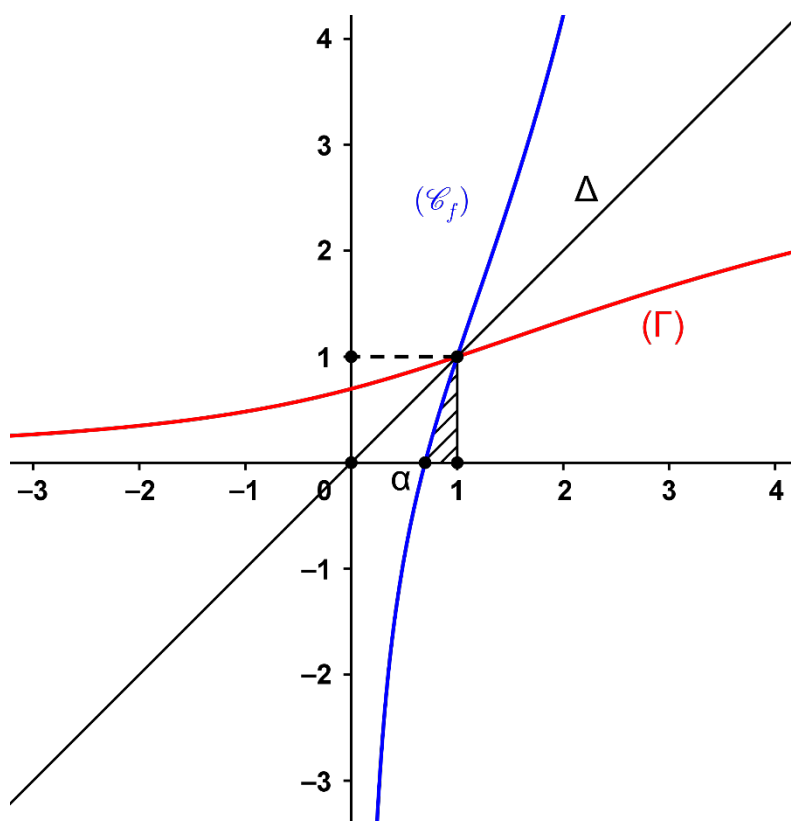
A) 3) b) ► f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .

$$\begin{cases} f(0.6) \approx -0.396 < 0 \\ f(0.7) \approx 0.012 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0.6 < \alpha < 0.7$$

A) 3) c) ►

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	—	○	+
$\left(\begin{smallmatrix} \text{Position} \\ \mathcal{C}_f \text{ et } \Delta \end{smallmatrix} \right)$	$\frac{\Delta}{\mathcal{C}_f}$	$\begin{smallmatrix} \\ (1,1) \end{smallmatrix}$	$\frac{\mathcal{C}_f}{\Delta}$

A) 3) d) ► La courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (Γ)



$$\begin{aligned} \text{A) 4) a) } \blacktriangleright \mathcal{A} &= \int_{\alpha}^1 |f(x)| dx = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 \left(x - \frac{1}{x} + e^{x-1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x + e^{x-1} \right]_{\alpha}^1 \\ \mathcal{A} &= \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{\alpha^2}{2} - \ln \alpha + e^{\alpha-1} \right) = \frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln \alpha - e^{\alpha-1} \text{ u.a} \end{aligned}$$

A) 4) b) ♦ Par raison de symétrie par rapport à la droite $\Delta : y = x$:

$$\blacktriangleright \int_0^1 f^{-1}(x) dx = \mathcal{A}_{\text{Carré}} - \mathcal{A} = 1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln \alpha - e^{\alpha-1} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \ln \alpha + e^{\alpha-1}$$



B) 1) a) ♦ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4} \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 4$

♦ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{x-1} \leq 1$

► Ainsi pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 5$.

B) 1) b) ♦ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; $g(x) = x - \frac{1}{6}f(x)$.

♦ g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{6}f'(x) = 1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{x^2} + e^{x-1}\right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + e^{x-1}\right)$

Comme $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 5$ alors $-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + e^{x-1}\right) \geq -\frac{5}{6}$ donc $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + e^{x-1}\right) \geq 0$

alors pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g'(x) \geq 0$ ainsi la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

B) 2) a) ♦ $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

♦ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq 1$

• Pour $n = 0$, $\alpha \leq u_0 = 1 \leq 1$. (la proposition est vraie pour $n = 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $\alpha \leq u_n \leq 1$ et montrons que $\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$.

❖ On a $\alpha \leq u_n \leq 1$ et comme g est croissante sur $[\alpha, 1] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

alors $g(\alpha) \leq g(u_n) \leq g(1)$ donc $\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{6} \leq 1$

• Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq 1$.

B) 2) b) ♦ Pour tout $x \in [\alpha, 1]$, $f(x) \geq 0$ et comme $u_n \in [\alpha, 1]$ alors $f(u_n) \geq 0$.

► $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = u_n - \frac{1}{6}f(u_n) - u_n = -\frac{1}{6}f(u_n) \leq 0$

ainsi la suite (u_n) est décroissante.

B) 2) c) ♦ La suite (u_n) est décroissante et minorée par α alors (u_n) est convergente.

► On a ★ $u_{n+1} = g(u_n)$.

★ (u_n) converge vers ℓ avec $\alpha \leq \ell \leq 1$.

★ g est continue sur $[\alpha, 1]$ donc g est continue en ℓ .

alors $\ell = g(\ell) \Leftrightarrow \ell = \ell - \frac{1}{6}f(\ell) \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \alpha$.

ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.



