

❖ Exercice 1 ► 4.5 points

1) a) $(E): z^2 - 2iz - 3 - 2i\sqrt{3} = 0$

◆ $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 2i + (2i)^2 = 12 + 8i\sqrt{3} - 4 = 8 + 8i\sqrt{3}.$

1) b) $\Delta = (-2i)^2 - 4(-3 - 2i\sqrt{3}) = -4 + 12 + 8i\sqrt{3} = 8 + 8i\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2i)^2$ donc $\delta = 2\sqrt{3} + 2i$

d'où ► $z_1 = \frac{2i + 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 4i}{2} = \sqrt{3} + 2i.$

► $z_2 = \frac{2i - 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

Ainsi $S_C = \{\sqrt{3} + 2i, -\sqrt{3}\}$

2) a) ◆ $z_I = i, z_A = -\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{3} + 2i.$

► $z_B - z_A = \sqrt{3} + 2i + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2i = 2(\sqrt{3} + i) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) b) ◆ $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre I et de rayon $R = 2.$

► $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2i}{2} = i = z_I$ alors $I = A * B.$

► $AB = |z_B - z_A| = \left|4e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 4 = 2 \times R$

Ainsi $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}).$

2) c) ◆ Placer les points A et B : **(Annexe).**

► $A \in (\mathcal{C}) \cap (O, \vec{u})$ avec $\text{Re}(z_A) < 0.$

► B est le symétrique de A par rapport à $I.$

3) a) ◆ $z_H = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

► $\frac{z_{\overline{AH}}}{z_{\overline{AB}}} = \frac{z_H - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 2i} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i}{2(\sqrt{3} + i)} = \frac{\frac{3}{4}(\sqrt{3} + i)}{2(\sqrt{3} + i)} = \frac{3}{8} \in \mathbb{R}$

d'où $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ sont colinéaires ainsi les points A, B et H sont alignés.

3) b) ◆ $z_H = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}.$

3) c) ► $\frac{z_{\overline{OH}}}{z_{\overline{AB}}} = \frac{z_H}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}}{4e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{8} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8} i \in i\mathbb{R}$ alors $\overline{AB} \perp \overline{OH}.$

► Comme les points A, B et H sont alignés alors $H \in (AB).$

Ainsi H est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(AB).$ **(Annexe).**



4) a) ► Comme $(BK) \perp (O, \vec{u})$ alors $\operatorname{Re}(z_K) = \operatorname{Re}(z_B) = \sqrt{3}$.

4) b) ♦ $K \in (OH)$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z_K = \alpha z_H$ donc $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_K) = \alpha \operatorname{Re}(z_H) \\ \operatorname{Im}(z_K) = \alpha \operatorname{Im}(z_H) \end{cases}$

$$\text{alors } \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z_K)}{\operatorname{Re}(z_H)} = \frac{\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}} = -4 \text{ d'où } \operatorname{Im}(z_K) = -4 \operatorname{Im}(z_H) = -4 \times \frac{3}{4} = -3 \text{ ainsi } z_K = \sqrt{3} - 3i.$$

❖ Exercice 2 ► 5 points

1) a) ► $A(1,1,3)$, $B(-3,1,1)$ et $C(3,-2,1)$ ► $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$.

► $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés ainsi les points A, B et C déterminent un plan P .

1) b) ♦ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $P = (ABC)$

alors $P : -6x - 12y + 12z + d = 0$ et comme $A(1,1,3) \in P$ alors $d = -18$

d'où $P : -6x - 12y + 12z - 18 = 0$ ainsi $P : x + 2y - 2z + 3 = 0$

2) a) ♦ $D(3,5,-1) : 3 + 10 + 2 + 3 = 18 \neq 0$ alors $D \notin P$.

2) b) ♦ Comme le plan Q est parallèle au plan P alors $Q : x + 2y - 2z + d' = 0$

♦ Comme $D(3,5,-1) \in Q$ alors $d' = -15$.

Ainsi $Q : x + 2y - 2z - 15 = 0$

3) a) ♦ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + (z-1)^2 - 1 + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9 = 3^2$$

Ainsi (S) est la sphère de centre $I(2,3,1)$ et de rayon $R = 3$

3) b) ♦ ► $d(I, P) = \frac{|2+6-2+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 = R$ alors (S) est tangente au plan P .

► Comme $A(1,1,3) : (1-2)^2 + (1-3)^2 + (3-1)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ alors $A \in (S)$.

Or $A \in P$, ainsi (S) est tangente au plan P en A .

♦ ► $d(I, Q) = \frac{|2+6-2-15|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 = R$ alors (S) est tangente au plan Q .

► Comme $D(3,5,-1) : (3-2)^2 + (5-3)^2 + (-1-1)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ alors $D \in (S)$.

Or $D \in Q$, ainsi (S) est tangente au plan Q en D .

4) a) ♦ $t \in]1, +\infty[$; $J(2+t, 3+2t, 1-2t)$; $A(1,1,3)$; $D(3,5,-1)$.

► $\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t+2 \\ -2t-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et Comme $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(t+1)\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires

ainsi les points A, D et J sont alignés.



4) b) ♦ $P: x + 2y - 2z + 3 = 0$; $Q: x + 2y - 2z - 15 = 0$; $J(2+t, 3+2t, 1-2t)$; $t \in]1, +\infty[$.

$$\blacktriangleright d(J, P) = \frac{|2+t+6+4t-2+4t+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|9t+9|}{3} = \frac{9|t+1|}{3} = 3(t+1) = 3t+3.$$

$$\blacktriangleright d(J, Q) = \frac{|2+t+6+4t-2+4t-15|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|9t-9|}{3} = \frac{9|t-1|}{3} = 3(t-1) = 3t-3.$$

5) ♦ (S_t) , de centre J , est tangente au plan P alors (S_t) est de rayon $R_t = d(J, P) = 3t+3$.

$$\blacklozenge d(J, Q) = 3t-3 < 3t+3$$

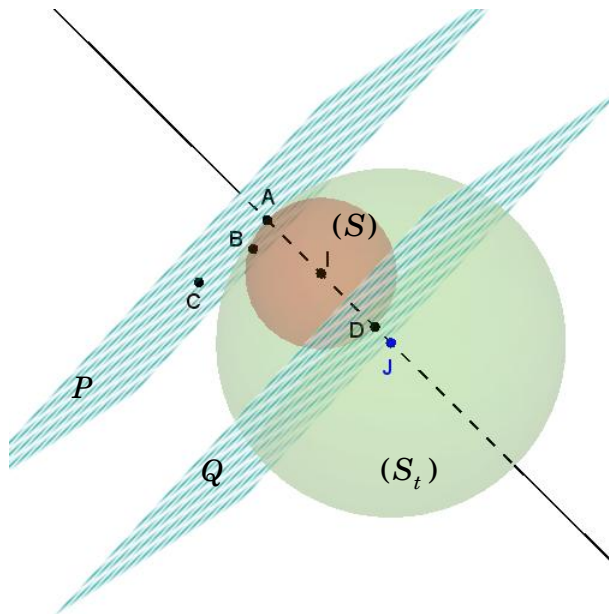
Ainsi (S_t) et Q se coupent suivant un cercle $\mathcal{C}$:

$$\blacktriangleright \text{de rayon : } r = \sqrt{(R_t)^2 - d^2} = \sqrt{(3t+3)^2 - (3t-3)^2} = \sqrt{36t} = 6\sqrt{t}$$

$$\blacktriangleright \text{Comme } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \vec{n} \text{ avec } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ un vecteur normal au plan } Q \text{ alors } (AD) \perp Q \text{ en } D.$$

Comme les points A, D et J sont alignés alors $(JD) \perp Q$ en D .

d'où D est le projeté orthogonal de J sur Q . ainsi D est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

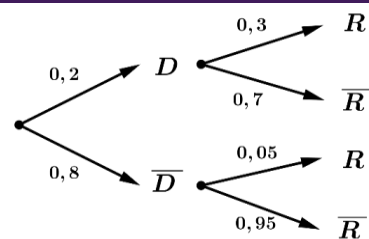


❖ Exercice 3 ▶ 3 points

1) a) ♦ $p(D) = 0.2$

$$\blacklozenge p(R/D) = 0.3$$

$$\blacklozenge p(R/\bar{D}) = 0.05$$



$$\begin{aligned} 1) \text{ b) } \blacklozenge p(R) &= p(D \cap R) + p(\bar{D} \cap R) = p(D) \times p(R/D) + p(\bar{D}) \times p(R/\bar{D}) \\ p(R) &= 0.2 \times 0.3 + 0.8 \times 0.05 = 0.1. \end{aligned}$$

$$1) \text{ c) } \blacklozenge p(D/R) = \frac{p(D \cap R)}{p(R)} = \frac{p(D) \times p(R/D)}{p(R)} = \frac{0.2 \times 0.3}{0.1} = 0.6$$

$$2) \text{ a) } \blacklozenge p(X=0) = p(\bar{D} \cap \bar{R}) = p(\bar{D}) \times p(\bar{R}/\bar{D}) = 0.8 \times 0.95 = 0.76$$



2) b) ♦ Les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{0, 2000, 3000, 6000\}$.

$$\diamond \begin{cases} p(X=0) = p(\bar{D} \cap \bar{R}) = 0.8 \times 0.95 = 0.76 \\ p(X=2000) = p(D \cap \bar{R}) = 0.2 \times 0.7 = 0.14 \\ p(X=3000) = p(\bar{D} \cap R) = 0.8 \times 0.05 = 0.04 \\ p(X=6000) = p(D \cap R) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 \end{cases}$$

x_i	0	2000	3000	6000
p_i	0.76	0.14	0.04	0.06

❖ Exercice 4 ▶ 7.5 points

I) 1) a) $f(x) = (x-1) \frac{e^x}{x^2}$; $x \in]0, +\infty[$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(x-1)}_{-1} \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty} = -\infty.$$

♦ La droite $x=0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

I) 1) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x-1)}_{+\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty} = +\infty$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x-1)}_{+\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^3}}_{+\infty} = +\infty.$$

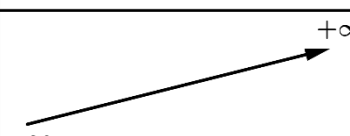
♦ $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

I) 2) a) ♦ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f'(x) &= \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x x^2 - 2x e^x}{x^4} (x-1) = \frac{x^2 e^x + (e^x x^2 - 2x e^x)(x-1)}{x^4} = \frac{x e^x (x + (x-2)(x-1))}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{e^x (x + x^2 - x - 2x + 2)}{x^3} = \frac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3} = \frac{((x-1)^2 + 1) e^x}{x^3}. \end{aligned}$$

I) 2) b)

$$\diamond \forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) > 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		

I) 3) a) ♦ $F(x) = \frac{e^x}{x}$; $x \in]0, +\infty[$.

$$\blacktriangleright \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) - F(x) = (x-1) \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{x e^x - e^x - x e^x}{x^2} = \frac{-e^x}{x^2} < 0$$

Ainsi $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_F)$ sur $]0, +\infty[$

I) 3) b) ♦ F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$\blacktriangleright F'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2} = (x-1) \frac{e^x}{x^2} = f(x)$$

alors F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.



- II) 1) a) ♦ $A(2, f(2))$ alors $A\left(2, \frac{e^2}{4}\right)$ ▶ Comme $F(2) = \frac{e^2}{2}$ alors $A\left(2, \frac{1}{2}F(2)\right)$.
 ♦ $B\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ alors $B\left(\frac{1}{2}, -2e^{\frac{1}{2}}\right)$ ▶ Comme $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}$ alors $B\left(\frac{1}{2}, -F\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.
 (Annexe).

- II) 1) b) ♦ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (Annexe).

- II) 2) a) ♦ Hachurer $S(\alpha)$. (Annexe).

- II) 2) b) ♦ $\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^\alpha |f(x)| dx = \int_1^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(1) = F(\alpha) - e$

- II) 2) c) ♦ $t \in]0, 1[$; $\mathcal{A}(t) = \int_t^1 |f(x)| dx = \int_t^1 -f(x) dx = -(F(1) - F(t)) = F(t) - F(1) = F(t) - e$.

- II) 2) d) ♦ $t_0 \in]0, 1[$; $\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}(\alpha) \Leftrightarrow F(t_0) - e = F(\alpha) - e \Leftrightarrow F(t_0) = F(\alpha)$

- II) 3) a) ♦ F est décroissante sur $]0, 1]$.

- II) 3) b) ♦ $u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(x) dx, n \geq 1$.

- ▶ Pour tout entier $n \geq 1, 0 < \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \leq 1$

Comme F est décroissante sur $]0, 1]$ alors $F\left(\frac{1}{n}\right) \leq F(x) \leq F\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Comme F est continue sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ alors $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F\left(\frac{1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(x) dx \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F\left(\frac{1}{n+1}\right) dx$

donc $F\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq u_n \leq F\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

d'où $ne^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \leq u_n \leq (n+1)e^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

Ainsi $\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}}$

- II) 3) c) ♦ $\begin{cases} \forall n \geq 1, \frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- ♦ $\begin{cases} \forall n \geq 1, \frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq e^{\frac{1}{n+1}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1 \end{cases}$



Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

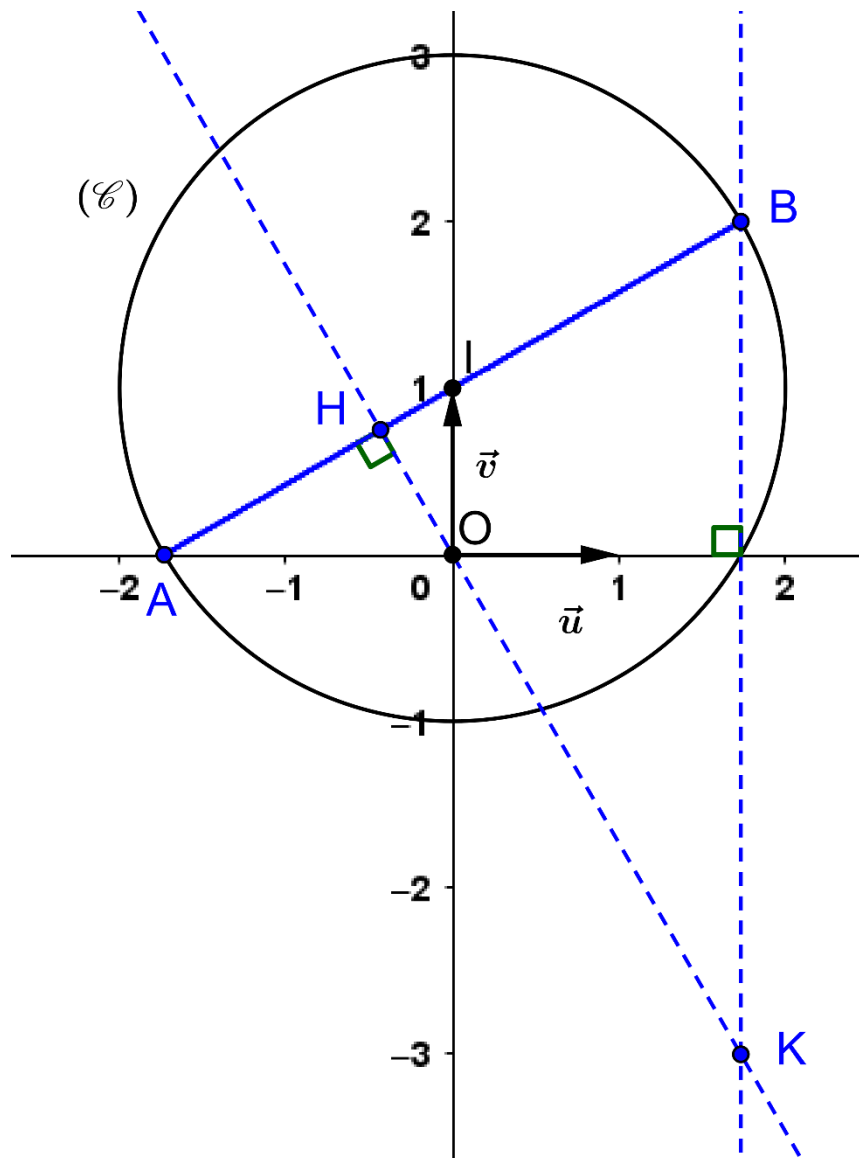


Figure 2

