

Exercice 1

1) a) $(E): z^2 - 3(\sqrt{3} + i)z + 4(1 + i\sqrt{3}) = 0$

◆ $(\sqrt{3} + i)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}i + i^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}.$

1) b) $\Delta = (3(\sqrt{3} + i))^2 - 4 \times 4(1 + i\sqrt{3}) = 9(2 + 2i\sqrt{3}) - 16(1 + i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(18 - 16) = 2 + 2i\sqrt{3}$

Comme $\Delta = 2 + 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3} + i)^2$ donc $\delta = \sqrt{3} + i$

d'où $\blacktriangleright z' = \frac{3(\sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} + i)}{2} = 2(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i.$

$\blacktriangleright z'' = \frac{3(\sqrt{3} + i) - (\sqrt{3} + i)}{2} = \sqrt{3} + i$

Ainsi $S_C = \{2\sqrt{3} + 2i, \sqrt{3} + i\}$

2) a) ◆ $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+i)z_A - z_A}{2z_A - z_A} = \frac{iz_A}{z_A} = i$

2) b) ◆ $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i \Rightarrow \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{AB}}} = i \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{AB}}} \right| = 1 \\ \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{AB}}} \in i\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = AB \\ \overline{AD} \perp \overline{AB} \end{cases}$

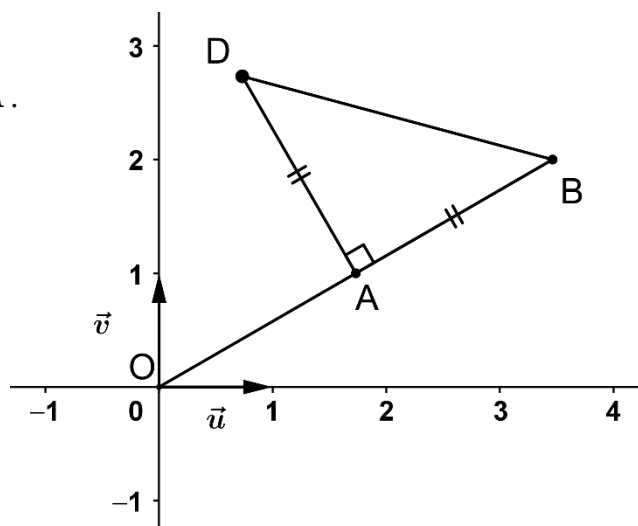
d'où le triangle BAD est rectangle isocèle en A .

2) c) ◆ $z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$

2) d) ◆ $z_D = (1+i)z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}.$

2) e) ◆ Construction du point D :

- BAD est rectangle isocèle en A .
- $\text{Im}(z_D) > 0$



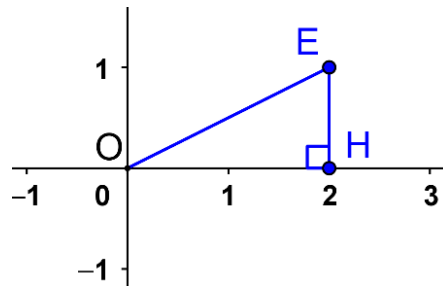
3) a) ♦ Soit $f : x \mapsto \tan x$; f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$.

alors f est continue, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc f réalise une bijection

de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $f\left([0, \frac{\pi}{2}[\right) = [0, +\infty[$.

3) b) Comme f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{2} \in [0, +\infty[$ alors il existe un unique $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan \theta = \frac{1}{2}$.

3) c) ♦ $\frac{HE}{OH} = \frac{|z_E - z_H|}{|z_H|} = \frac{|i|}{|2|} = \frac{1}{2}$

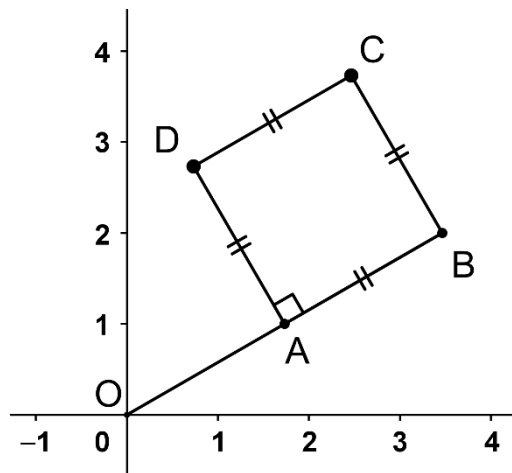


3) d) ♦ $\tan(\widehat{EOH}) = \frac{HE}{OH} = \frac{1}{2} = \tan \theta \Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OE}) \equiv \theta [2\pi] ; \left(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\right)$

$$\left. \begin{array}{l} |z_E| = |2 + i| = \sqrt{5} \\ \arg(z_E) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OE}) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow z_E = \sqrt{5} e^{i\theta}.$$

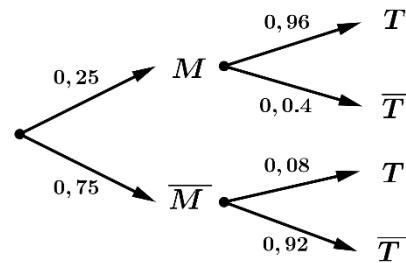
4) a) ♦ $ABCD$ est un carré $\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow z_C - z_D = z_B - z_A \Rightarrow z_C = z_D + z_B - z_A$
d'où $z_C = (1+i)z_A + 2z_A - z_A = (2+i)z_A$.

4) b) ♦ $z_C = (2+i)z_A = z_E \times z_A = \sqrt{5} e^{i\theta} \times 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{5} e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}$



Exercice 2

- 1) a) ♦ $p(M) = 0.25$
 ♦ $p(T / M) = 0.96$
 ♦ $p(\bar{T} / \bar{M}) = 0.92$



- 1) b) ♦ $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = p(M) \times p(T / M) + p(\bar{M}) \times p(T / \bar{M})$
 $= 0.25 \times 0.96 + 0.75 \times 0.08 = 0.3.$

- 1) c) ♦ $p(M / T) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p(T / M)}{p(T)} = \frac{0.25 \times 0.96}{0.3} = 0.8$

- 2) a) ♦ $p(X = 50) = (p(\bar{T}))^5 = (0.7)^5 = 0.16807$

- 2) b) ♦ $p(X = 220) = p(\bar{T}) \times p(T) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$

- 2) c) ♦ Les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{50, 210, 220, 230, 240, 250\}.$

$$\begin{cases} p(X = 50) = 0.16807 \\ p(X = 210) = p(T) = 0.3 \\ p(X = 220) = 0.21 \\ \diamond \begin{cases} p(X = 230) = (p(\bar{T}))^2 \times p(T) = (0.7)^2 \times 0.3 = 0.147 \\ p(X = 240) = (p(\bar{T}))^3 \times p(T) = (0.7)^3 \times 0.3 = 0.1029 \\ p(X = 250) = (p(\bar{T}))^4 \times p(T) = (0.7)^4 \times 0.3 = 0.07203 \end{cases} \end{cases}$$

x_i	50	210	220	230	240	250
p_i	0.16807	0.3	0.21	0.147	0.1029	0.07203

Exercice 3

A) 1) a) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{-\infty} e^x + 1 + \underbrace{\frac{2}{e^x}}_0 \right) = -\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} e^x}_{-\infty} + 1 + \underbrace{\frac{2}{e^x}}_0 \right) = -\infty.$

♦ $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & e^{2x} & e^x & 2x \\ & 0 & 0 & -\infty \end{pmatrix} = -\infty.$

♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + \cancel{2x} - \cancel{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & e^{2x} & e^x \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

alors la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.



1) c) ♦ $f(x) - 2x = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^x = \frac{e^x}{2}(2 - e^x)$;

♦ $f(x) - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x) - 2x$	+	$\bigcirc$	-
$\left(\begin{array}{c} \text{Position} \\ \mathcal{C}_f \text{ et } \Delta \end{array} \right)$	$\frac{\mathcal{C}_f}{\Delta}$	$\frac{\Delta}{\mathcal{C}_f}$ ($\ln 2, \ln 4$)	

2) a) ♦ f est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{2x} + e^x + 2 = -((e^x)^2 - e^x - 2) \\ = -(e^x + 1)(e^x - 2) = (e^x + 1)(2 - e^x)$$

2) b) ♦ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
f	$-\infty$	$2 \ln 2$	$-\infty$

2) c) ♦ f est continue, strictement croissante sur $] -\infty, \ln 2]$ et $f(]-\infty, \ln 2]) =] -\infty, 2 \ln 2]$.

comme $0 \in] -\infty, 2 \ln 2]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -\infty, \ln 2]$ une unique solution α .

► $\begin{cases} f(-0.3) \approx -0.13 < 0 \\ f(-0.2) \approx 0.08 > 0 \end{cases}$ Comme $f(-0.3) \times f(-0.2) < 0$ alors $-0.3 < \alpha < -0.2$.

♦ f est continue, strictement décroissante sur $[\ln 2, +\infty[$ et $f([\ln 2, +\infty[) =] -\infty, 2 \ln 2]$.

comme $0 \in] -\infty, 2 \ln 2]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[\ln 2, +\infty[$ une unique solution β .

► $\begin{cases} f(1.2) \approx 0.2 > 0 \\ f(1.3) \approx -0.46 < 0 \end{cases}$ Comme $f(1.2) \times f(1.3) < 0$ alors $1.2 < \beta < 1.3$.

Conclusion : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β .

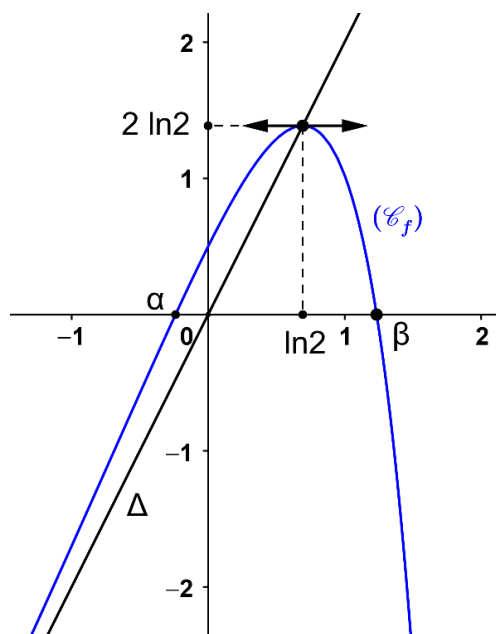
2) d) ♦ $\alpha \leq x \leq 0$, Comme f est croissante sur $[\alpha, 0] \subset] -\infty, \ln 2]$ alors $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0)$

ainsi $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

♦ $\alpha \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - f(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1 - f(x)} \leq 2$

Comme $\begin{cases} 1 \leq \frac{1}{1 - f(x)} \leq 2 \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{f(x)}{1 - f(x)} \leq 1.$

3) a)



$$\mathbf{3) b) \diamond} \mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x)| dx = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \int_0^{\ln 2} \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + 2x \right) dx = \left[-\frac{1}{4} e^{2x} + e^x + x^2 \right]_0^{\ln 2}.$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{1}{4} e^{2x} + e^x + x^2 \right]_0^{\ln 2} = (-1 + 2 + (\ln 2)^2) - \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = (\ln 2)^2 + \frac{1}{4} \text{ u.a}$$

B) 1) a) $\diamond$ $u_n = \int_{\alpha}^0 (f(t))^n dt$; $n \in \mathbb{N}^*$; Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto (f(t))^n$ est continue sur $[\alpha, 0]$.

$$\diamond \alpha \leq t \leq 0 \Rightarrow 2) d) \quad 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow 0 \leq \int_{\alpha}^0 (f(t))^n dt \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \int_{\alpha}^0 dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n (0 - \alpha) \Rightarrow 0 \leq u_n \leq -\alpha \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

$$\mathbf{1) b) \diamond} \begin{cases} 0 \leq u_n \leq -\alpha \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\alpha \left(\frac{1}{2} \right)^n = -\alpha \times 0 = 0 \quad ; (-1 < \frac{1}{2} < 1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2) a) $\diamond$ $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n \in \mathbb{N}^*$; $\diamond (f(t))^k$, $k \geq 1$ est une suite géométrique de raison $f(t)$

$$\blacktriangleright S_n = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^0 (f(t))^k dt = \int_{\alpha}^0 \left(\sum_{k=1}^n (f(t))^k \right) dt = \int_{\alpha}^0 f(t) \left(\frac{1 - (f(t))^n}{1 - f(t)} \right) dt = \int_{\alpha}^0 \frac{f(t)}{1 - f(t)} (1 - (f(t))^n) dt$$

2) b) $\diamond$ $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ alors (S_n) est croissante.

$$\diamond \forall t \in [\alpha, 0] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow -\left(\frac{1}{2} \right)^n \leq -(f(t))^n \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq 1 - (f(t))^n \leq 1 ; \text{ On a } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{f(t)}{1 - f(t)} \leq 1 \\ 0 \leq 1 - (f(t))^n \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \frac{f(t)}{1 - f(t)} (1 - (f(t))^n) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{\alpha}^0 \frac{f(t)}{1 - f(t)} (1 - (f(t))^n) dt \leq \int_{\alpha}^0 dt \Rightarrow 0 \leq S_n \leq \int_{\alpha}^0 dt \Rightarrow 0 \leq S_n \leq -\alpha.$$

$\blacktriangleright$ Ainsi (S_n) majorée par $-\alpha$.

2) c) $\diamond$ (S_n) est croissante, majorée par $-\alpha$ alors (S_n) converge vers un réel ℓ .

$\diamond$ Comme $0 \leq S_n \leq -\alpha$ alors $0 \leq \ell \leq -\alpha$, or $-0.3 < \alpha$ donc $-\alpha < 0.3$ ainsi $0 \leq \ell < 0.3$



Exercice 4

1) a) $A(-2, -1, 0)$; $B(1, 3, 1)$; $C(0, 1, 1)$ et $I(1, 0, -2)$ $\rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

1) b) $\diamond \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés ainsi les points A, B et C déterminent un plan P .

1) c) $\diamond \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $P = (ABC)$
alors $P : 2x - y - 2z + d = 0$ et comme $A(-2, -1, 0) \in P$ alors $d = 3$ d'où $P : 2x - y - 2z + 3 = 0$

2) a) $\diamond I(1, 0, -2) : 2 - 0 + 4 + 3 = 9 \neq 0$ alors $I \notin P$.

2) b) $\diamond \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Le volume du tétraèdre $ABCI : \mathcal{V} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}| = \frac{1}{6} |6 - 1 + 4| = \frac{3}{2}$.

3) a) $\diamond$ La sphère (S) de centre I , de rayon R est tangente à P

alors $R = d(I, P) = \frac{|2 - 0 + 4 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

Ainsi $(S) : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$

3) b) $\diamond H(-1, 1, 0) : 2x_H - y_H - 2z_H + 3 = -2 - 1 - 0 + 3 = 0 \Rightarrow H \in P$.

$\diamond H(-1, 1, 0) : (x_H - 1)^2 + y_H^2 + (z_H + 2)^2 = 4 + 1 + 4 = 9 \Rightarrow H \in (S)$.

Ainsi H est le point de contact de (S) et P .

3) c) $\diamond (IH)$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $H(-1, 1, 0) \in (IH)$

$\rightarrow$ ainsi $(IH) : \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

4) a) $\diamond \overrightarrow{HA} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\diamond$ Le cercle ζ de centre H , de rayon r est tangente à (AC)

alors $r = d(H, (AC)) = \frac{\|\overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{4 + 1 + 4}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 1$



4) b) ♦ Soit M un point de la droite $(IH) \perp P$; $M \in (IH) \Rightarrow M(-1-2\alpha, 1+\alpha, 2\alpha)$

$$\blacktriangleright d(M, P) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2(-1-2\alpha) - (1+\alpha) - 2(2\alpha) + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-9\alpha|}{3} = 3 \Leftrightarrow |\alpha| = 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1).$$

Pour $\alpha = -1$, $M(1, 0, -2) = I$ et pour $\alpha = 1$, $M(-3, 2, 2) \neq I$.

Ainsi il existe un point de la droite (IH) distinct de I tel que $d(M, P) = 3$.

4) c) ♦ (S) est tangente à P au point H alors $(IH) \perp P$ en H d'où H est le projeté orthogonal de chacun des points M et I sur P .

♦ $d(M, P) = 3 < \sqrt{10} \Rightarrow S_{(M, \sqrt{10})} \cap P$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{10-9} = 1 = r$

♦ $d(I, P) = 3 < \sqrt{10} \Rightarrow S_{(I, \sqrt{10})} \cap P$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{10-9} = 1 = r$

► Ainsi $S_{(M, \sqrt{10})} \cap S_{(I, \sqrt{10})} = \mathcal{C}_{(H, 1)} = \zeta$.

