

Exercice 1

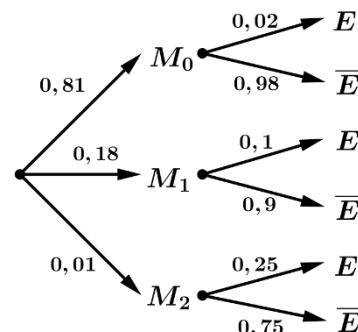
4 points

1) Comme A et B sont indépendants alors :

- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.1 + 0.1 - 0.01 = 0.19$

2) • $p(M_2) = p(A \cap B) = 0.01$

- $p(M_0) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$
- $p(M_1) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = (0.1 \times 0.9) + (0.9 \times 0.1) = 0.18$

3) a) • $p(E \cap M_2) = p(M_2) \times p(E / M_2) = 0.01 \times 0.25 = 0.0025$

- $p(E \cap M_0) = p(M_0) \times p(E / M_0) = 0.81 \times 0.02 = 0.0162$
- $p(E \cap M_1) = p(M_1) \times p(E / M_1) = 0.18 \times 0.1 = 0.018$

3) b) • $p(E) = p(E \cap M_0) + p(E \cap M_1) + p(E \cap M_2)$

$$p(E) = 0.0162 + 0.018 + 0.0025 = 0.0367$$

3) c) • $p(M_0 / E) = \frac{p(M_0 \cap E)}{p(E)} = \frac{0.0162}{0.0367} \approx 0.4414$ 4) a) X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = p(E) = 0.0367$.4) b) $p_n = p(X = 0) = C_n^0 (0.0367)^0 (0.9633)^n = (0.9633)^n$.

4) c) $p_n \geq 0.75 \Leftrightarrow (0.9633)^n \geq 0.75 \Leftrightarrow n \ln(0.9633) \geq \ln(0.75) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0.75)}{\ln(0.9633)} \approx 7.69$
alors $n = 7$.

Exercice 2

5.5 points

A) 1) a) $(E): z^2 + (1 - 3i\sqrt{3})z - 8 = 0$

$$\Delta = (1 - 3i\sqrt{3})^2 - 4 \times (-8) = 1 - 6i\sqrt{3} - 27 + 32 = 6 - 6i\sqrt{3}$$

$$\text{Comme } (3 - i\sqrt{3})^2 = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = 6 - 6i\sqrt{3} \quad \text{alors } \Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$$

1) b) $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$ alors $\delta = 3 - i\sqrt{3}$

$$\text{d'où } \blacktriangleright z' = \frac{-1 + 3i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$\blacktriangleright z'' = \frac{-1 + 3i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 + i\sqrt{3}, -2 + 2i\sqrt{3}\}$$

2) a) • $a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 

$$\bullet \frac{1}{a} = \frac{1}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\bullet a^2 = \left(2 e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

2) b) Construction des points : $\blacktriangleright B\left(\frac{1}{a} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ et $\blacktriangleright C(a^2 = 4 e^{i\frac{2\pi}{3}})$.

B) 1) $M(z)$; $N(z^2)$; $P\left(\frac{1}{z}\right)$; $P'(\bar{z})$

♦ Comme $M \in (IA)$ et $(IA): x=1$ alors $\operatorname{Re}(z)=1$.

2) a) $z=1+ib$; $b \in \mathbb{R}^*$. $\frac{z_{\overline{MN}}}{z_{\overline{OM}}} = \frac{z^2 - z}{z} = z - 1 = 1 + ib - 1 = ib \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (MN) \perp (OM)$.

2) b) $z^2 = (1+ib)^2 = 1 + 2ib - b^2 = (1-b^2) + 2ib$ alors $\operatorname{Im}(z^2) = 2b = 2\operatorname{Im}(z)$.

2) c) Construction du point N : $\blacktriangleright (MN) \perp (OM)$ et $\blacktriangleright \operatorname{Im}(z_N) = 2\operatorname{Im}(z)$

3) a) $\frac{z_{\overline{OP}}}{z_{\overline{OP'}}} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z z} = \frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont colinéaires d'où O, P et P' sont alignés.

3) b) Comme I et M sont distincts alors $z \neq 1$ d'où $\frac{1}{z} \neq 1$ donc I et P sont distincts.

3) c) $\frac{z_{\overline{IP}}}{z_{\overline{OP}}} = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z}} = \frac{1-z}{z} \times z = 1 - z = -ib \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} \perp \overrightarrow{OP}$.

alors le point P appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[OI]$.

3) d) Construction du point P : $\blacktriangleright P'(\bar{z})$ $\blacktriangleright O, P$ et P' sont alignés. $\blacktriangleright P \in (\mathcal{C})$

Exercice 3

3.5 points

$$\bullet U_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{et} \quad V_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}} dx ; n \in \mathbb{N}^*$$

1) a) ♦ $U_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \left(\ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln^2(1) \right) = \frac{1}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1) b) ♦ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} n^2 \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 2) \text{ a) On a } 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} &\Rightarrow 2 \leq 1+x \leq 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$2) \text{ b) On a pour tout } 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} : \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ comme } \forall x \in [1; 1 + \frac{1}{n}], \frac{\ln x}{x} \geq 0$$

$$\text{alors } \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln x}{x} : \text{fonctions continues sur } [1; 1 + \frac{1}{n}]$$

$$\text{donc } \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \underbrace{\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx}_{U_n} \leq \underbrace{\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}} dx}_{V_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{x} dx}_{U_n}$$

$$\text{d'où } \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times U_n \leq V_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times U_n.$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ c) } \diamond &\begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times U_n \leq V_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times U_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \times 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \times U_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = 0 \end{cases} \\
 &\diamond \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times n^2 U_n \leq n^2 V_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times n^2 U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \times n^2 U_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 V_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \times n^2 U_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 4

7 points

$$\diamond f(x) = (x+1)e^{-x} + x ; x \in \mathbb{R}.$$

$$D) 1) \diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} + x = -\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{-x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_1 \underbrace{e^{-x}}_{+\infty} + 1 \right) = +\infty.$$

$\diamond (\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

$$2) \text{ a) } \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^{-x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-(-xe^{-x})}_0 + \underbrace{e^{-x}}_0 + \underbrace{x}_{+\infty} \right) = +\infty.$$

$$2) \text{ b) } \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-(-xe^{-x})}_0 + \underbrace{e^{-x}}_0 \right) = 0$$

alors la droite $D : y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$



2) c) ♦ $f(x) - x = (x+1)e^{-x}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - x$	$-$	ϕ	$+$
$\left(\begin{array}{l} \text{Position} \\ \mathcal{C} \text{ et } D \end{array} \right)$	$\overline{D}$	$\overline{\mathcal{C}}$ $(-1, -1)$	$\overline{D}$

II) 1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la courbe (Γ) est au-dessus de l'axe des abscisses alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.
d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1) b) Le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

1) c) ♦ f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

et comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .

♦ $\begin{cases} f(-0.7) = -0.0958 < 0 \\ f(-0.6) = 0.1288 > 0 \end{cases}$ Comme $f(-0.7) \times f(-0.6) < 0$ alors $\alpha \in]-0.7, -0.6[$.

2) a) ♦ La courbe (Γ) admet une tangente horizontale au point $F\left(1, 1 - \frac{1}{e}\right)$ alors $f''(1) = 0$.

♦ Le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	ϕ	$+$

2) b) f'' s'annule en 1 en changeant de signe alors le point $E(1, f(1))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

3) a) $T: y = f'(1)(x-1) + f(1) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x-1) + \frac{2}{e} + 1 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)x - 1 + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} + 1 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)x + \frac{3}{e}$

3) b) $G(3,3): \left(1 - \frac{1}{e}\right)3 + \frac{3}{e} = 3 - \frac{3}{e} + \frac{3}{e} = 3$ alors $G(3,3) \in T$.

3) c) ♦ $\overrightarrow{OF}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 - \frac{1}{e} \end{array}\right)$ et comme $\overrightarrow{OF}\left(\begin{array}{c} 1 \\ f'(1) \end{array}\right)$ alors $\overrightarrow{OF}$ est un vecteur directeur de T .

3) d) ♦ La tangente T : T est parallèle à (OF) passant par G .

♦ Le point E est l'intersection de la droite $x=1$ et la tangente T .

4) a) ♦ $J(0,1): \begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow J \in (\mathcal{C}) \\ f'(0) = 1 \Rightarrow J \in (\Gamma) \end{cases}$ alors $J \in (\mathcal{C}) \cap (\Gamma)$.

4) b) La courbe $(\mathcal{C})$.



5) a) ♦ $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx.$

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

alors $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^{-x} dx = -1 - \left[e^{-x} \right]_{-1}^0 = -1 - (1-e) = e-2$

5) b) ♦ $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 (f'(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^0 f'(x) dx - \int_{-1}^0 ((x+1)e^{-x} + x) dx.$

$$\mathcal{A} = \underbrace{\left[f(x) \right]_{-1}^0}_{1+1} - \underbrace{\int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx}_{e-2} - \underbrace{\int_{-1}^0 x dx}_{-\frac{1}{2}} = 2 - e + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - e \quad (u.a)$$



Figure 1

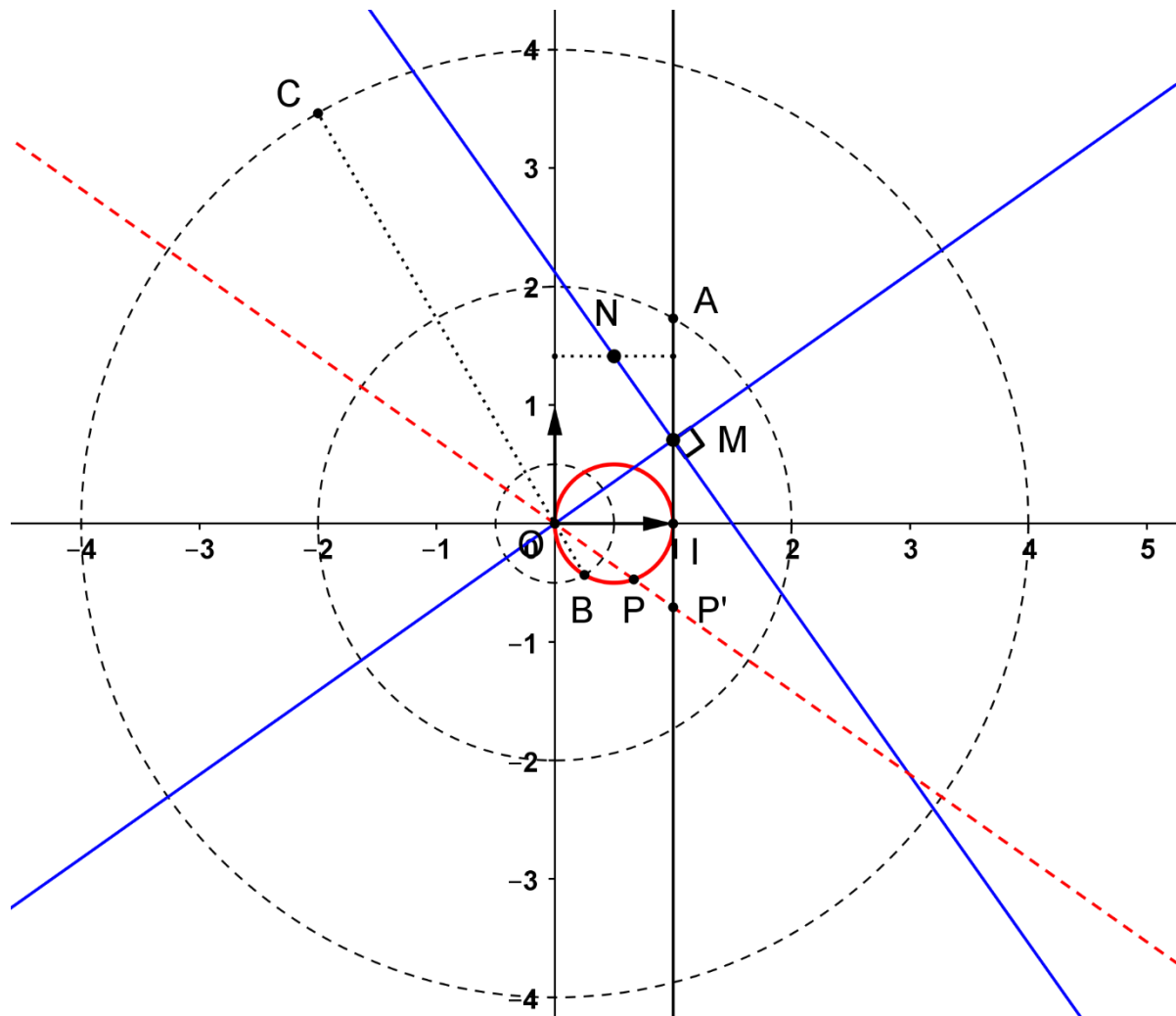


Figure 2

