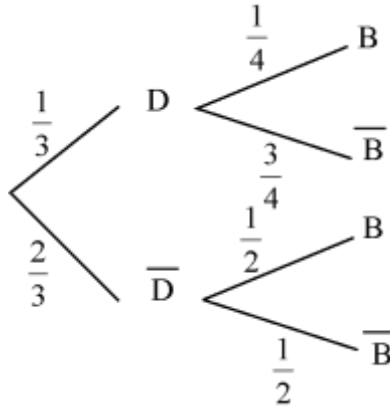


MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Expérimentales
Session principale 2021

Exercice 1 (4 pts)

1. a) $p(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b)



2. a) $p(B) = p(B \cap D) + p(B \cap \bar{D}) = p(D)p(B|D) + p(\bar{D})p(B|\bar{D}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.

b) $p(\bar{D}|B) = \frac{p(B \cap \bar{D})}{p(B)} = \frac{p(\bar{D})p(B|\bar{D})}{p(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$.

3. a) X suit la loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{12}$.

Alors $X(E) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et pour tout $k \in X(E)$, $p(X = k) = C_5^k \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(\frac{7}{12}\right)^{5-k}$.

b) $p(X = 1) = C_5^1 \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(\frac{7}{12}\right)^4 = \frac{60025}{248832} \approx 0.241$.

c) $q = 1 - p(X = 5) = 1 - \left(\frac{5}{12}\right)^5 = 1 - \frac{3125}{248832} = \frac{245707}{248832} \approx 0.987$.

Exercice 2 (5 pts)

1. a) $(E): Z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})Z + 4(-1 + i\sqrt{3}) = 0$.

$$(2\sqrt{3} - 2i)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3}i + (2i)^2 = 12 - 8\sqrt{3}i - 4 = 8 - 8\sqrt{3}i.$$

b) (E): $Z^2 - 2(1+i\sqrt{3})Z + 4(-1+i\sqrt{3}) = 0$.

$$\Delta = \left(2(1+i\sqrt{3})\right)^2 - 16(-1+i\sqrt{3}) = 4(1-3+2i\sqrt{3}) + 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= 8 - 8i\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 2i)^2$$

$$z' = \frac{2(1+i\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})$$

$$z'' = \frac{2(1+i\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + 2i}{2} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{z', z''\}.$$

2. $Z_A = 1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})$, $Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $Z_C = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$.

a) $iZ_A = i(1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})) = i(1 + \sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = Z_C$.

b) $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$. $\frac{Z_C}{Z_A} = i$. Comme $\frac{Z_C}{Z_A}$ est imaginaire alors $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$.

$$|Z_C| = |i| \times |Z_A| \text{ alors } OC = OA.$$

Ainsi le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

c) $Z_A + Z_C = 1 + \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = 2 + 2i\sqrt{3} = Z_B$.

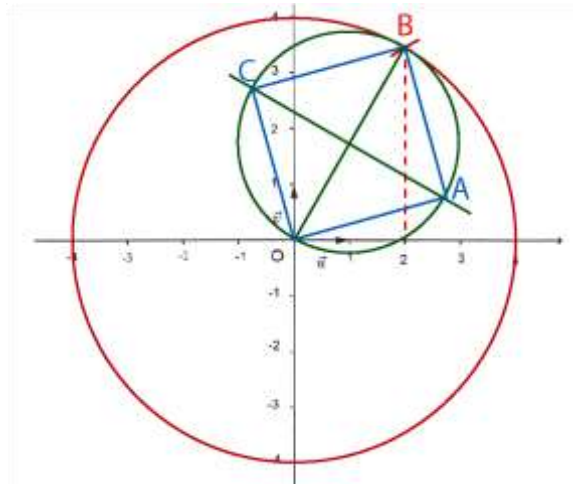
Alors le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

De plus $OA = OC$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, donc OABC est un carré.

3. a)

$$Z_B = 2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b)



c) OABC est un carré donc A et C appartiennent à l'intersection de la médiatrice de $[OB]$ avec le cercle de diamètre $[OB]$. De plus $\text{Ré}(Z_A) > 0$ et $\text{Ré}(Z_A) < 0$.

4. $\theta \in [0, \pi]$. $Z_M = 1 + i\sqrt{3} + 2e^{i\theta}$.

a) $M = B \Leftrightarrow 1 + i\sqrt{3} + 2e^{i\theta} = 2 + 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow 2e^{i\theta} = 1 + i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 2e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (car } \theta \in [0, \pi] \text{)}.$$

b) OAB est un triangle rectangle en A. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle OAB.

Le point K milieu de $[OB]$ est le centre de Γ . $Z_K = \frac{Z_B}{2} = 1 + i\sqrt{3}$

$\frac{OB}{2} = 2$ est le rayon de Γ .

Soit $\theta \in [0, \pi]$. $Z_M = 1 + i\sqrt{3} + 2e^{i\theta}$ alors $Z_M - (1 + i\sqrt{3}) = 2e^{i\theta}$

Alors $|Z_M - (1 + i\sqrt{3})| = 2$ d'où $KM = 2$ par suite, $M \in \Gamma$.

Exercice 3 (4 pts)

$$K = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx \text{ et } J = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx.$$

1. a) Pour tout $x \in [\sqrt{e}, e]$, $\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$.

b) $J = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| - \ln|x| \right]_{\sqrt{e}}^e$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - 1 - \frac{1}{2} \ln(e - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^2 - 1}{e - 1}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(e + 1) - \frac{1}{2}.$$

2. a) $K = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx.$

On pose $u(x) = \ln x$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$ $v(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 - 1}$

$$K = \left[\frac{1}{2} \times \frac{-\ln x}{x^2 - 1} \right]_{\sqrt{e}}^e + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx = \frac{-1}{2(e^2 - 1)} + \frac{1}{4(e - 1)} + \frac{1}{2} J$$

$$= \frac{-2}{4(e^2 - 1)} + \frac{e + 1}{4(e^2 - 1)} + \frac{1}{2} J = \frac{e - 1}{4(e^2 - 1)} + \frac{1}{2} J = \frac{1}{4(e + 1)} + \frac{1}{2} J$$

$$\text{Ainsi } 2K = \frac{1}{2(e + 1)} + J.$$

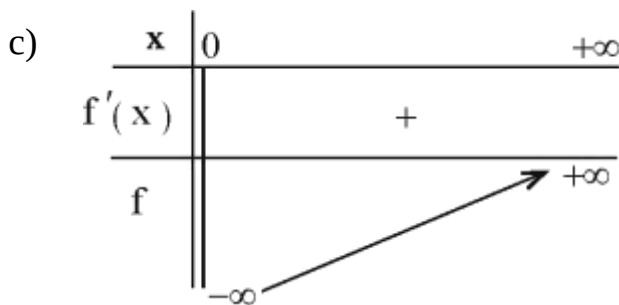
$$\text{b) } 2K = \frac{1}{2(e + 1)} + J = \frac{1}{2(e + 1)} + \frac{1}{2} \ln(e + 1) - \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } K = \frac{1}{4(e + 1)} + \frac{1}{4} \ln(e + 1) - \frac{1}{4}.$$

Exercice 4 (7 pts)

$$1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$\text{b) } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

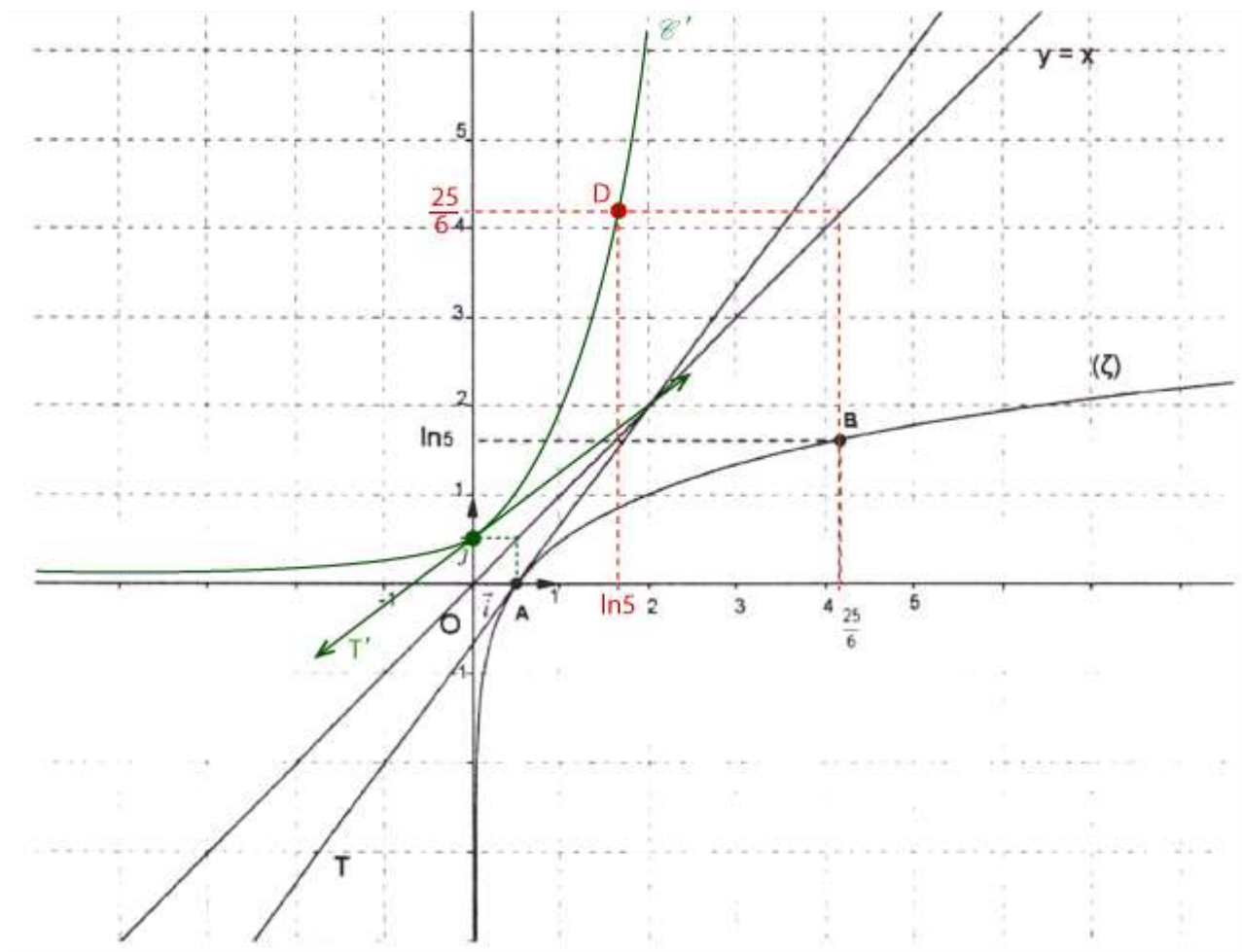


d) On a : f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$

$$\text{On a : } f \text{ est continue donc } f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \right[= \mathbb{R}$$

Par suite f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2. a)



b) $\zeta' = S_{\Delta}(\zeta)$

3. a)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0, +\infty[\\ f(y) = x \end{cases}$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4y}}{2}\right) = x \Leftrightarrow \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y}}{2} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4y} = 2e^x - y$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y = 4e^{2x} - 4ye^x + y^2 \Leftrightarrow 4y = 4e^{2x} - 4ye^x \Leftrightarrow y + ye^x = e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ; $e^x - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x} = \frac{e^{2x}}{1 + e^x} = f^{-1}(x)$

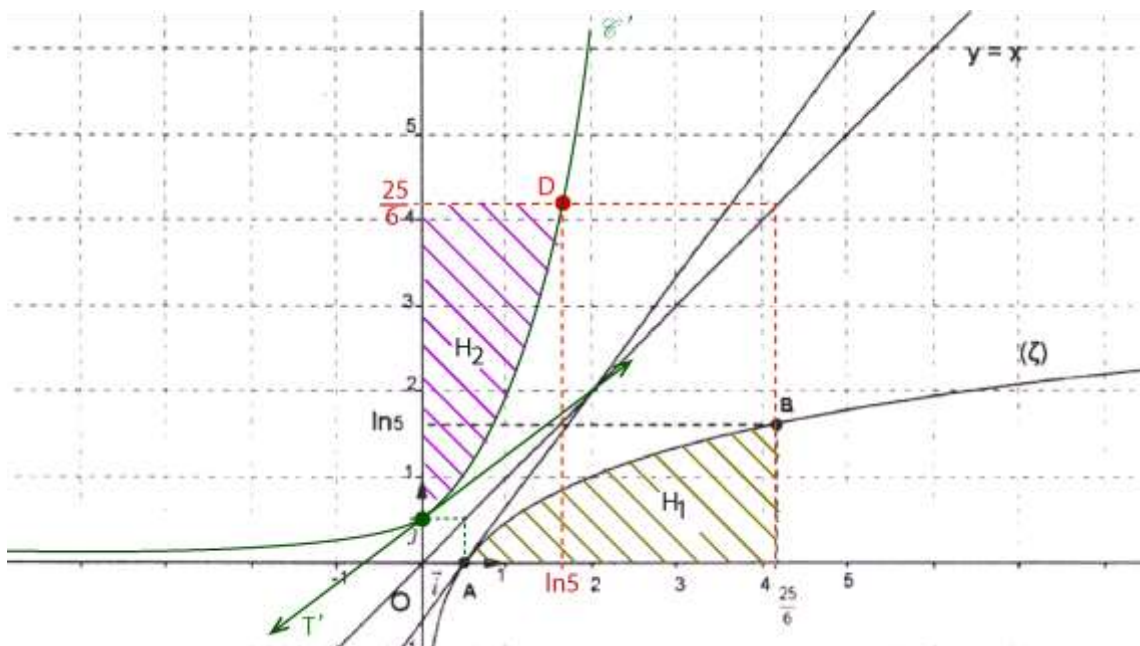
4. a) Soit H_1 la partie du plan limitée par ζ , les droites d'équations respectives

$$y = 0, x = \frac{1}{2} \text{ et } x = \frac{25}{6}.$$

Soit H_2 la partie du plan limitée par ζ' et les droites d'équations respectives

$$x = 0, x = \ln 5 \text{ et } y = \frac{25}{6}.$$

$$\text{Aire}(H_1) = \text{Aire}(H_2). \text{ Par suite } A = \int_0^{\ln 5} \left(\frac{25}{6} - f^{-1}(x) \right) dx.$$



$$b) \mathcal{A} = \int_0^{\ln 5} \left(\frac{25}{6} - f^{-1}(x) \right) dx = \int_0^{\ln 5} \frac{25}{6} dx - \int_0^{\ln 5} f^{-1}(x) dx.$$

$$\text{On a } \int_0^{\ln 5} \frac{25}{6} dx = \frac{25}{6} \ln 5.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} f^{-1}(x) dx &= \int_0^{\ln 5} e^x - \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[e^x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln 5} \\ &= 5 - \ln 6 - 1 + \ln 2 = 4 - \ln 3. \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } \mathcal{A} = \frac{25}{6} \ln 5 - 4 + \ln 3$$