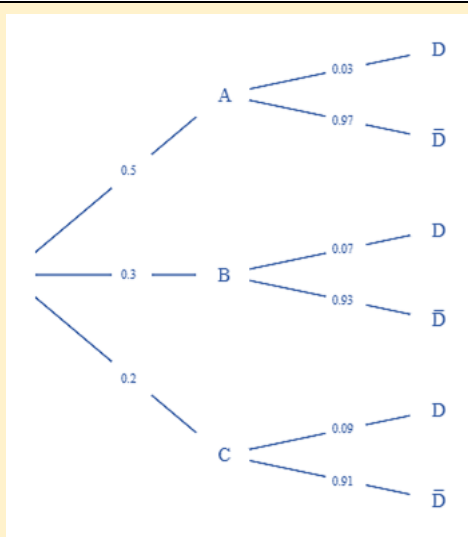


**Correction sujet de mathématiques bac sciences expérimentales
Session principale 2020**

Commentaires

Barème



1-a)

$$P(A \cap D) = P(D/A) \times P(A) = 0.03 \times 0.5 = 0.015$$

$$P(B \cap D) = P(D/B) \times P(B) = 0.07 \times 0.3 = 0.021$$

$$P(C \cap D) = P(D/C) \times P(C) = 0.09 \times 0.2 = 0.018$$

b)

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ = 0.015 + 0.021 + 0.018 = 0.054$$

c)

$$P(\bar{A}/D) = \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B \cap D) + P(C \cap D)}{P(D)} \\ = \frac{0.021 + 0.018}{0.054} = 0.722$$

2- a- $p_n = (P(\bar{D}))^n = (1 - P(D))^n = 0.946^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0.$

b-

$$p_n \leq 0.1 \text{ signifie que : } 0.946^n \leq 0.1$$

$$\text{signifie que : } n \ln(0.946) \leq \ln(0.1)$$

$$\text{signifie que : } n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.946)} \approx 41.4$$

La plus petite valeur de n pour que $p_n \leq 0.1$ est 42.

1- a) $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \frac{1}{2} \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i)$

2- $M(z)$ et $N\left(\frac{1}{2}z^2\right)$

a) I le milieu de $[MN]$ si et seulement si $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$

Equivant à $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i) = \frac{z + \frac{1}{2}z^2}{2}$

Equivant à $2(1 + \sqrt{3})(1 + i) = 2z + z^2$

Equivant à $z^2 + 2z - 2(1 + \sqrt{3})(1 + i) = 0$

Equivant à z est solution de (E).

b) Si $M=A$ alors $B=N$ et comme I est le milieu de $[AB]$

Alors z_A est solution de (E).

3- z_C la deuxième solution de (E), et $K(-2)$.

a) $z_A + z_C = s = -\frac{b}{a} = -2$

b) $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_K}{2} = -1 \Rightarrow [AC] \text{ et } [OK] \text{ ont le même milieu}$

Donc $OAKC$ est un parallélogramme.

c) z_C une solution de (E), et $D\left(\frac{1}{2}z_C\right)^2$ Donc I est le milieu de $[CD]$.

4- a) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

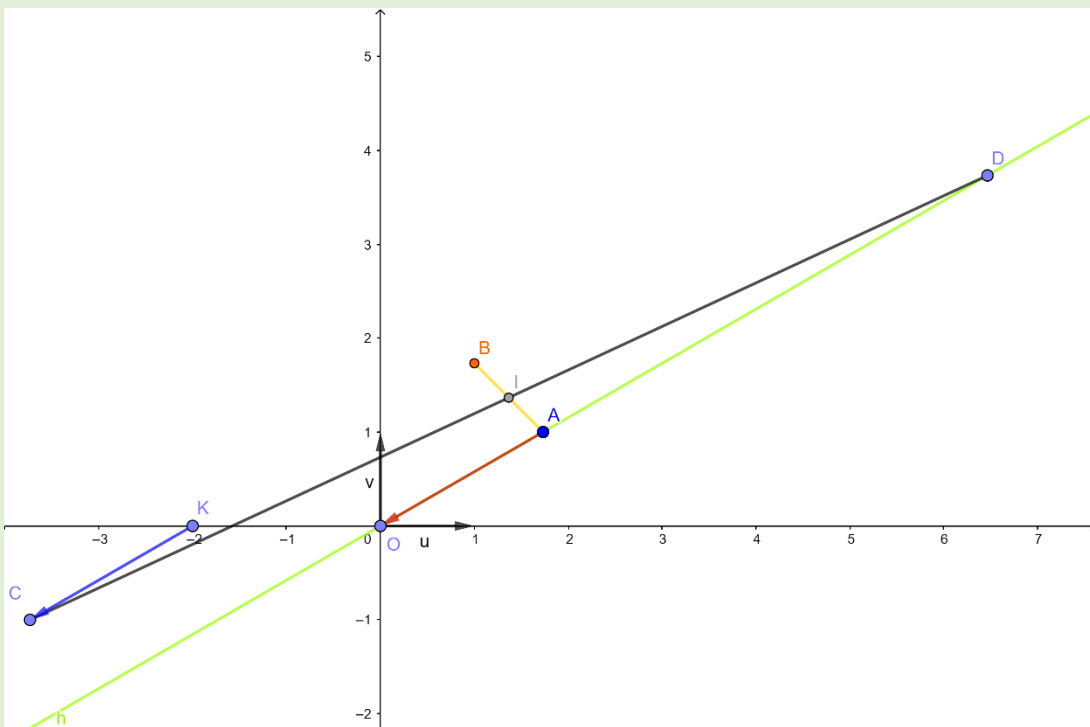
$z_A \times z_C = \frac{c}{a} = -2(1+\sqrt{3})(1+i) = 2e^{i\pi}(1+\sqrt{3})\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b) $2e^{i\frac{\pi}{6}} \times z_C = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{5\pi}{4}} \Rightarrow z_C = (\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$z_D = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 e^{i\frac{13\pi}{6}} = 2(2+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}} = (2+\sqrt{3})z_A$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = (2+\sqrt{3})\overrightarrow{OA}$

Donc O, A et D sont alignés.



1- $O(0,0,0)$ $A(1,0,0)$ $B(1,1,0)$ $C(0,1,0)$ $D(0,0,1)$ $E(1,0,1)$ $F(1,1,1)$ $G(0,1,1)$

$E'(1,0,-1)$ $F'(1,1,-1)$ $D'(0,0,-1)$ $G'(0,1,-1)$

a) $C(0,1,0)$ $B(1,1,0)$ $F(1,1,1)$ $K(0,0,a)$

$$b) \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$c) \quad \mathcal{V}_{FCBK} = |\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BF})| = |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK}) \cdot \overrightarrow{BF}| = 1uv$$

2- $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK}$ est un vecteur normal du plan $P=(BCK)$

Donc : $P: ay + z + d = 0$ et comme $B \in P \Rightarrow a + d = 0$ Donc $d = -a$

D'où : $P: ay = z - a = 0$

$$3- a) \quad E'(1, 0, -1) \text{ On pose } L(x, y, z) \text{ alors } \overrightarrow{E'L} = (1-a)\overrightarrow{OC} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y=1-a \\ z+1=0 \end{cases}$$

Donc $L(1, 1-a, -1)$

$$b) \quad \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK} \text{ Donc } (BL) \perp P \text{ et } B \in P$$

Donc B est le projeté orthogonal de L sur P .

$$4- \quad S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2(a-1)y + 2z + 1 - 2a = 0.$$

$$a) \quad \text{soit } M(x, y, z) \in S \text{ alors } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2(a-1)y + 2z + 1 - 2a = 0$$

$$\text{si gnifie que : } (x-1)^2 + (y+a-1)^2 + (z+1)^2 = 1 + (a-1)^2 + 1 - 1 + 2a$$

$$\text{si gnifie que : } (x-1)^2 + (y-(1-a))^2 + (z+1)^2 = a^2 + 2$$

Donc S est la sphère de centre $L(1, 1-a, -1)$ et de rayon : $R = \sqrt{2+a^2}$.

$$b) \quad d(L, P) = BL = \sqrt{a^2+1} \text{ Donc } d(L, P) < R$$

$$\text{Alors } S \cap P = \mathcal{C}_{(B,r)} \text{ où } r = \sqrt{(a^2+2) - (a^2+1)} = 1$$

$$1- \quad g(x) = x^2 + e^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$a) \quad g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = 2x - e^{-x}.$$

b) g' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors g' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation : $g'(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \mathbb{R}$

De plus : $g'(0.3) \approx -0.14 < 0$ et $g'(0.4) \approx 0.12 > 0$ alors $0.3 < \beta < 0.4$

c)

x	$-\infty$	β	$+\infty$
g'	+	0	-

$$2- \quad f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$a) \quad g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ alors } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

Donc f' et g' ont le même signe

$$3- a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + e^{-x}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + e^{-x}} = +\infty$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2 + e^{-x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 e^x}} = -\infty$$

$= 0^+$

$\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

$$c) \quad f(x) - x = \sqrt{x^2 + e^{-x}} - x = \frac{x^2 + e^{-x} - x^2}{\sqrt{x^2 + e^{-x}} + x} = \frac{e^{-x}}{f(x) + x}$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{f(x) + x} = 0 \text{ Donc la droite d'équation } y=x \text{ est une asymptote oblique à } \mathcal{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.$$

$$e) \quad f(x) - x = \frac{e^{-x}}{f(x) + x} > 0 \text{ Donc } \mathcal{C}_f \text{ au-dessus de } \Delta.$$

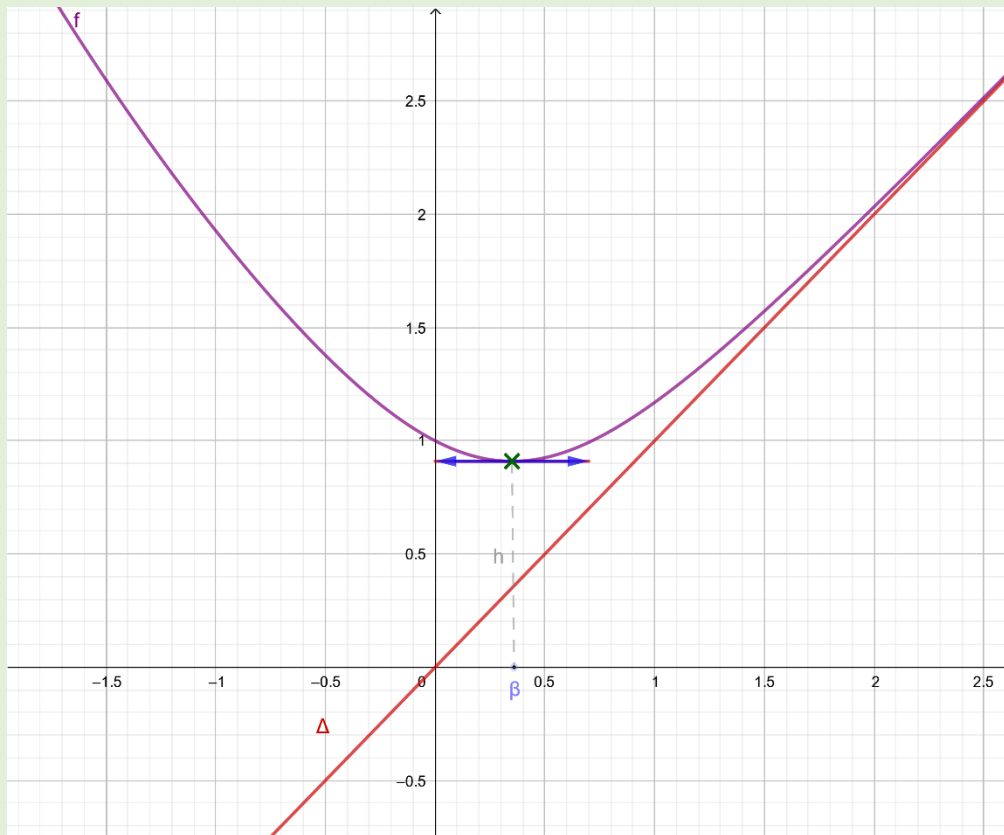
4- a)

x	$-\infty$	β	$+\infty$
f'	—	0	+
f	$+\infty$ ↘	$f(\beta)$	↗ $+\infty$

b)

$$g'(\beta) = 0 \Rightarrow e^{-\beta} = 2\beta$$

$$f(\beta) = \sqrt{\beta^2 + e^{-\beta}} = \sqrt{\beta^2 + 2\beta} \quad \beta \approx 0.35 \Rightarrow f(\beta) \approx 0.91$$



$$5- a) \quad a_n = \int_1^n (f(x) - x) dx$$

$$a_{n+1} - a_n = \int_1^{n+1} (f(x) - x) dx - \int_1^n (f(x) - x) dx = \int_n^{n+1} (f(x) - x) dx$$

Or $x \mapsto f(x) - x$ est une fonction continue positive sur $[n, n+1]$

Donc $\int_n^{n+1} (f(x) - x) dx > 0$ pour tout $n \geq 2$

Donc la suite (a_n) est croissante.

$$b) f(x) - x = \frac{e^{-x}}{f(x) + x}$$

f est croissante sur $[1, n] \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(n)$ pour tout $x \in [1, n]$

par conséquent $0 < f(1) + 1 \leq f(x) + x \leq f(n) + n$

$$d'où \quad \frac{1}{f(n) + n} \leq \frac{1}{f(x) + x} \leq \frac{1}{f(1) + 1}$$

$$\text{et comme : } e^{-x} > 0 \text{ alors : } \frac{e^{-x}}{f(n) + n} \leq \frac{e^{-x}}{f(x) + x} \leq \frac{e^{-x}}{f(1) + 1}$$

$$\text{signifie que : } \frac{e^{-x}}{n + f(n)} \leq f(x) - x \leq \frac{e^{-x}}{1 + f(1)}$$

c) étant donnée que :

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto \frac{e^{-x}}{f(n) + n} \\ x \mapsto f(x) - x \\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{f(1) + 1} \end{array} \right\} \text{ sont trois fonctions continues sur } [1, n] \text{ pour tout } n \geq 2$$

$$\text{Alors : } \int_1^n \frac{e^{-x}}{f(n) + n} dx \leq \int_1^n (f(x) - x) dx \leq \int_1^n \frac{e^{-x}}{f(1) + 1} dx$$

$$\text{D'où : } \frac{[-e^{-x}]_1^n}{f(n) + n} \leq a_n \leq \frac{[-e^{-x}]_1^n}{f(1) + 1}$$

$$\text{signifie que : } \frac{e^{-1} - e^{-n}}{f(n) + n} \leq a_n \leq \frac{e^{-1} - e^{-n}}{f(1) + 1}$$

$$\text{pour tout } n \geq 2 \text{ on a : } \frac{e^{-1} - e^{-n}}{1 + f(1)} < \frac{e^{-1}}{1 + f(1)}$$

$$d) \text{ alors la suite } (a_n) \text{ est majorée par : } \frac{e^{-1}}{1 + f(1)}$$

(a_n) est une suite croissante et majorée donc (a_n) est convergente.

$$6- a) \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2 + f(2)} \approx 0.0577 \quad \frac{e^{-1}}{1 + f(1)} \approx 0.1696$$

b)

$$\text{pour tout } n \geq 2 : a_2 \leq a_n \leq \frac{e^{-1}}{1 + f(1)}$$

$$\text{Donc : } a_2 \leq L \leq \frac{e^{-1}}{1 + f(1)}$$

c'est à dire : $0.05 < 0.0577 \leq L \leq 0.1696 < 0.17$