

Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

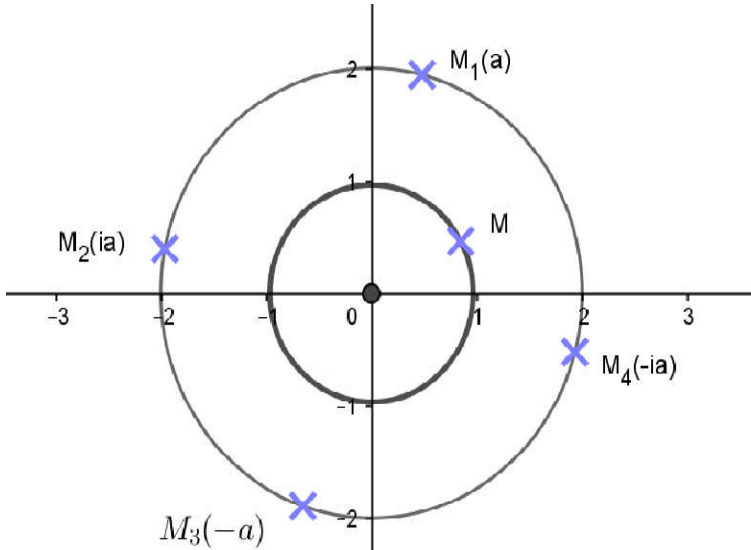
Session principale

Exercice 1 (4 points)

Questions	Solution
1)	
2)	$p(V) = p(V/G)p(G) + p(V/\bar{G})p(\bar{G})$ $= 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 0.15 = 0.345$
3)	$p(\bar{G}/V) = \frac{p(\bar{G} \cap V)}{p(V)} = \frac{0.15 \times 0.7}{0.345} = 0.304$
4)	$p = C_{10}^2 \times (0.8)^2 \times (0.2)^8 = 0.0000737$
5) a/	La probabilité demandée est $(0.2)^n$
b/	$p_n = 1 - (0.2)^n$
c/	$p_n \geq 0.9 \Leftrightarrow 1 - (0.2)^n \geq 0.9 \Leftrightarrow (0.2)^n \leq 0.1$ $\Leftrightarrow n \ln(0.2) \leq \ln(0.1)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)} \Leftrightarrow n \geq 1.43 \text{ alors le plus petit valeur est } n = 2$

Exercice 2(4 points)

Questions	solutions
1) a/	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$ on a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$
b/	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1)$ on a : $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1) + i \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ et d'autre part on a $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et par conséquent

	on aura $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \end{cases}$ Or on sait que $\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \end{cases}$
2) a/	on a $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ donc $a^4 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4 = 16e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(1 - i\sqrt{3})$.
b/	b/ $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - a^2)(z^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z + a)(z + ia)(z - ia) = 0 \Leftrightarrow z = a, z = -a, z = ia \text{ et } z = -ia$
c/	

Exercice 3 (5 points)

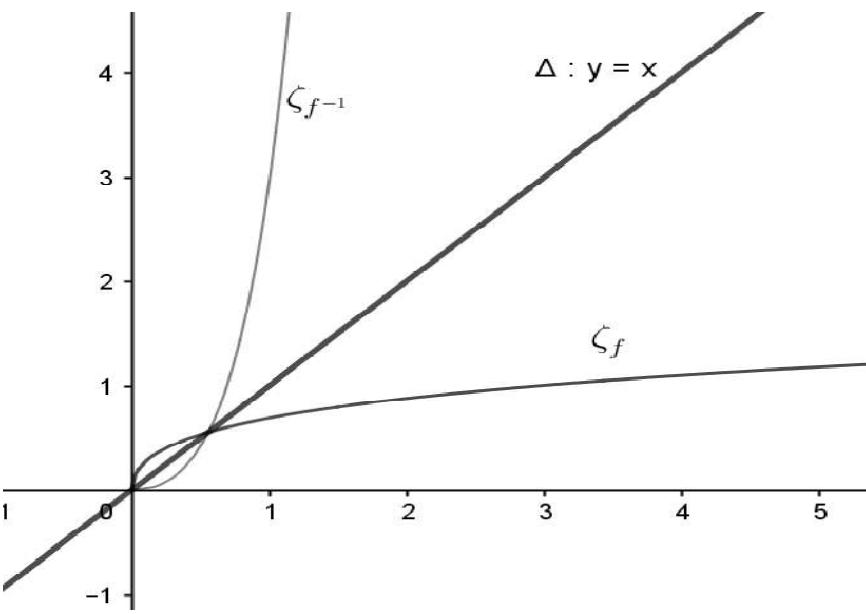
Questions	Solution
1) a/	on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et alors les points A, B et C définissent un plan P.
b/	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc P a pour équation : $-6x - 6y + 6z + d = 0$ et comme $A(-2, 1, 1) \in P$ donc $12 - 6 + 6 + d = 0$ donc $d = -12$ et alors $P : -6x - 6y + 6z - 12 = 0$ alors $P : x + y - z + 2 = 0$

2) a/	on a $2+2-0+2=6 \neq 0$ donc $E \notin P$
b/	$V_{EABC} = \frac{1}{6} \left (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE} \right = \frac{1}{6} \left \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right = 6$
3)	$\overrightarrow{u}_{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \text{ qui est un vecteur normal de } P \text{ donc } \Delta \perp P$ $M(x \ y \ z) \in P \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha+2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha+\alpha-(-\alpha+2)+2=0 \\ x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ Donc $P \cap \Delta = \{H(0,0,2)\}$
4) a/	$\alpha \neq 0$ et $M(\alpha, \alpha, -\alpha+2) \in \Delta$ $V_{MABC} = \frac{1}{6} \left (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} \right = \frac{1}{6} \left \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha+2 \\ \alpha-1 \\ -\alpha+1 \end{pmatrix} \right = 3\alpha $
b/	$V_{MABC} = 2 V_{EABC} \Leftrightarrow 3\alpha = 12 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ ou } \alpha = -4 \text{ donc}$ $M(4, 4, -2) \text{ ou } M(-4, -4, 6)$

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ On a la fonction $x \mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positif sur $[0, +\infty[$ alors la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$
b/	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = (+\infty) \times 1 = +\infty$ En effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ donc la courbe représentative de } f \text{ admet}$ une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif
c/	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+\sqrt{x})$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\sqrt{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0 \text{ En effet :}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\sqrt{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} = 0$ Donc la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.
d/	
e/	f est continu et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.
f/	soit $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$ tel que $f^{-1}(x) = y$ $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{y}) = x \Leftrightarrow 1+\sqrt{y} = e^x$ donc pour tout $\Leftrightarrow \sqrt{y} = e^x - 1 \Leftrightarrow y = (e^x - 1)^2$ $x \in [0, +\infty[$ on a $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$
2) a/	$I = \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ On a $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc $\frac{3}{4} \leq x + \sqrt{x} \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x + \sqrt{x}} \leq \frac{4}{3} \text{ d'où } \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3} \text{ soit donc pour tout } x \in I, f'(x) \leq \frac{2}{3}$
b/	On pose $u(x) = f(x) - x$ u est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$ $u'(x) = f'(x) - 1 < 0$ alors la fonction u est strictement décroissante sur I. u est continu et strictement décroissante sur I alors elle réalise une bijection de I sur $u(I) = \left[\ln 2 - 1, \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = J$ et comme $0 \in J$ alors l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans I. De plus $u(0.5) \times u(0.6) < 0$ donc $0.5 < \alpha < 0.6$

3) a/	
b/	$A = 2 \int_0^\alpha (x - f^{-1}(x)) dx = 2 \int_0^\alpha x - (e^x - 1) dx = 2 \int_0^\alpha (x - e^{2x} + 2e^x - 1) dx$ $= 2 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x - x \right]_0^\alpha$ $= \alpha^2 - e^{2\alpha} + 4e^\alpha - 2\alpha - 3$
4) a/	on a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ donc vrais pour $n=0$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ On a $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$ et f est une fonction strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ alors $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f(u_n) \leq f(1) \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq \ln 2 \leq 1 \text{ alors } u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$.
b/	f est dérivable sur $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$, $f'(x) \leq \frac{2}{3}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le fait que $u_n, \alpha \in I$ donc $ f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{2}{3} u_n - \alpha \Leftrightarrow u_{n+1} - \alpha \leq \frac{2}{3} u_n - \alpha \text{ et on montre par récurrence}$ sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ On a $u_0 - \alpha = 1 - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n=0$

	Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ On sait que $u_{n+1} - \alpha \leq \frac{2}{3} u_n - \alpha$ donc $u_{n+1} - \alpha \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors $u_{n+1} - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ et par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c/	c/ on a $u_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ donc la suite est convergente et converge vers α
d/	on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ et f^{-1} est continu en α donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha$