

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences expérimentales)

Session principale 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- Produit vectoriel dans l'espace
- Droites et plans de l'espace
- Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan , plan tangent à une sphère
- Volume d'un tétraèdre

$$1. A(x;y;z) \in Q \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;0;0)$$

$$B(x;y;z) \in Q \cap (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;2;0)$$

$$C(x;y;z) \in Q \cap (O, \vec{k}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow C(0;0;\sqrt{2})$$

2. Puisque $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donc S est la sphère de centre O et de rayon 1

$$\text{On a } d(O, Q) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1+2}} = 1 \text{ donc Q est tangent à la sphère S}$$

$$\text{On a } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à Q}$$

$$M(x;y;z) \in Q \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+\alpha \\ y=0+\alpha \\ z=0+\sqrt{2}\alpha \\ x+y+\sqrt{2}z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\sqrt{2}\alpha \\ \alpha=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$3. \text{ On a } \overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ a \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{a} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{4}{a} \end{vmatrix} \vec{k} = \frac{4\sqrt{2}}{a} \vec{i} + \sqrt{2}a \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{ainsi } \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{a} \\ \sqrt{2}a \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. a. Puisque $\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{a} \\ \sqrt{2}a \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CMN) donc une

équation du plan (CMN) est $\frac{4\sqrt{2}}{a}x + \sqrt{2}ay + 4z + d = 0$ et puisque

$$C(0;0;\sqrt{2}) \in (CMN) \text{ donc } d = -4\sqrt{2} \text{ ainsi } (CMN): \frac{4\sqrt{2}}{a}x + \sqrt{2}ay + 4z - 4\sqrt{2} = 0$$

équivalent à $(CMN): 4x + a^2y + 2a\sqrt{2}z - 4a = 0$

b. on a $(CMN): 4x + a^2y + 2a\sqrt{2}z - 4a = 0$

$$\text{donc } d = d(O, (CMN)) = \frac{|-4a|}{\sqrt{16 + a^4 + 8a^2}} = \frac{4a}{\sqrt{(4 + a^2)^2}} = \frac{4a}{4 + a^2}$$

$$\text{et puisque } 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2 + 4} = \frac{a^2 + 4 - a^2 + 4a - 4}{a^2 + 4} = \frac{4a}{a^2 + 4} \text{ donc } d = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2 + 4}$$

c. On a $d = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2 + 4}$ est maximale lorsque $\frac{(a-2)^2}{a^2 + 4} = 0$ donc $a = 2$

5. a. on a $V(OCMN) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{CN}) \cdot \overrightarrow{CO}| = \frac{1}{6} |4\sqrt{2}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

autrement : $V(OCMN) = \frac{A(OMN) \times OC}{3} = \frac{a \times \frac{4}{a} \times \sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. On a $V(OCMN) = \frac{A(CMN) \times d}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où $A(CMN) = \frac{2\sqrt{2}}{d}$

puisque $d \leq 1$ donc $\frac{1}{d} \geq 1$ d'où $A(CMN) = \frac{2\sqrt{2}}{d} \geq 2\sqrt{2}$

c. on a $A(CMN) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{d} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow d = 1 \Leftrightarrow a = 2$ donc $M = A$ et $N = B$

Exercice n°2 :

De quoi s'agit-il ?

- Calcul de probabilité d'événements
- Probabilité conditionnelle, probabilité total
- Variable aléatoire et espérance
- Loi Binomiale

1.

a. On a $p(G_1) = \frac{1}{6}$

b. On a $p(G_2) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

c. On a $p(G_1 \cup G_2) = p(G_1) + p(G_2) - p(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - 0 = \frac{1}{4}$

2.

a. On a $X(E) = \{0; 50; 100\}$

$$p(X=0) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$$

Autrement : $p(X=0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$p(X=50) = p(G_2) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

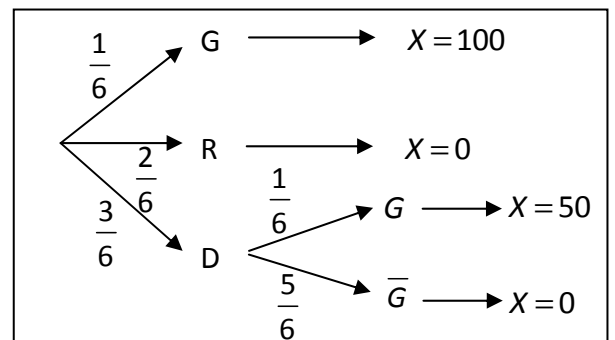
$$p(X=100) = p(G_1) = \frac{1}{6}$$

b. Le montant moyen à recevoir par un client est

$$E(X) = 0 + 50 \times \frac{1}{12} + 100 \times \frac{1}{6} = \frac{125}{6} = 20,833DT$$

3. Y suit une loi binomiale de paramètre $n=200$ et $p=0,25$ alors $E(Y) = 200 \times 0,25 = 50$

4. Le montant moyen qu'il doit prévoir de dépenser est $200 \times E(X) = 200 \times \frac{250}{12} = 4166,7$



Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
- Complexe et géométrie

1. On a $(E): z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$

Puisque $\Delta = (i\sqrt{3})^2 + 4 = 1$ donc

$$z' = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{i\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2.

a. On a $P(i\sqrt{3}) = 3(i\sqrt{3})^4 - 7i\sqrt{3}(i\sqrt{3})^3 - 18(i\sqrt{3})^2 + 7i\sqrt{3}(i\sqrt{3}) + 3$
 $= 27 - 7i\sqrt{3}(-i3\sqrt{3}) + 18 \times 3 - 21 + 3 = 27 - 63 + 54 - 21 + 3 = 0$

On a $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 - 18\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 3$
 $= 3e^{i\frac{4\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18e^{i\frac{2\pi}{3}} + 7i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3$
 $= -3e^{i\frac{\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$
 $= -3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 7i\sqrt{3} + 9 - 9i\sqrt{3} + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$
 $= -12 + 12 + i\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{7}{2}\right) = 0$

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{3}{z^4} + \frac{7i\sqrt{3}}{z^3} - \frac{18}{z^2} - \frac{7i\sqrt{3}}{z} + 3 = \frac{3 + 7i\sqrt{3}z - 18z^2 - 7i\sqrt{3}z^3 + 3z^4}{z^4} = \frac{P(z)}{z^4}$$

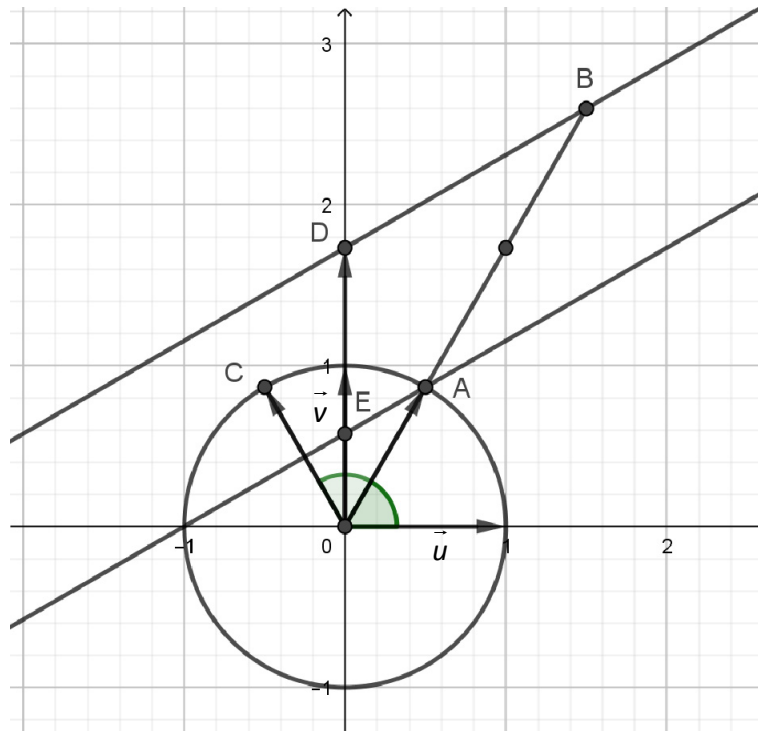
c. On a $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\frac{3}{\sqrt{3}}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P(\sqrt{3}i) = 0$

$$P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

d'où $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$

3.

a.



b. On a $z_D = z_A + z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

c. On a $\text{aff}(\overrightarrow{BD}) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\text{aff}(\overrightarrow{EA}) = z_A - z_E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - iy = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)$

$$(AE) // (BD) \text{ donc } \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - y \end{vmatrix} = 0 \text{ équivaut à } -\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

équivaut à $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $z_E = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

Autrement : dans le triangle OBD on a $(EA) // (BD)$ d'après Thalès puisque

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \text{ donc } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} \text{ ainsi } z_E = \frac{1}{3}z_D = \frac{i\sqrt{3}}{3}$$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- Utiliser un graphique pour déterminer les images et les limites d'une fonction ainsi que le signe de sa fonction dérivée
- Fonction en exponentielle et ln (limites, variations, branches infinies)
- Calcul d'aires et encadrement
- Fonctions primitives

- A. 1. On a $u(1)=0$, $u(\alpha)=0$, $u'(4)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)=+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x} = 1$$

2.

x	0	1	α	$+\infty$
$u(x)$	+	0	-	0
				+

x	0	4	$+\infty$
$u'(x)$	—	0	+

B.

1. a. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$e^{u(x)} - u(x) = e^{x-1-4\ln x} - (x-1-4\ln x) = \frac{e^{x-1}}{e^{4\ln x}} - (x-1) + 4\ln x = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x = f(x)$$

- b. On a $f(\alpha) = e^{u(\alpha)} - u(\alpha) = e^0 - 0 = 1$

c. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{u(x)} - u(x)) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty \end{cases}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{u(x)} - u(x)) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty \end{cases}$

d. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^5} \right) e^{-1} - \left(1 - \frac{1}{x} \right) + 4 \frac{\ln x}{x} = +\infty$

autrement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{u(x)}}{x} - \frac{u(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{u(x)}}{u(x)} \times \frac{u(x)}{x} - \frac{u(x)}{x} \right) = +\infty$

- e. La droite $\Delta: x=0$ est une asymptote à (C)

(C) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

2.

- a. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = e^{u(x)} - u(x)$

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} - u'(x) = u'(x) [e^{u(x)} - 1]$$

- b. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = u'(x) (e^{u(x)} - 1)$

$$\text{On a } e^{u(x)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{u(x)} \geq 1 \Leftrightarrow u(x) \geq 0 \text{ d'où}$$

x	0	1	4	α	$+\infty$			
$u(x)$		−	−	0	+	+		
$e^{u(x)} - 1$		+	0	−	−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+

D'où $f'(x) > 0$ si et seulement si $x \in]1; 4[\cup]\alpha; +\infty[$

c. Le tableau de variation de f :

x	0	1	4	α	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(4)$		$+\infty$	

The graph shows a function $f(x)$ on the interval $[0, \infty)$. The function has a local minimum at $x=1$ and a local maximum at $x=4$. The function values at the boundaries are $+\infty$ at $x=0$ and $x=\alpha$, and $+\infty$ at $x=\infty$. The function is decreasing on $(0, 1)$, increasing on $(1, 4)$, and decreasing on $(4, \infty)$.

3.

a. Soit $h(x) = e^x - 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x) = e^x - 2$

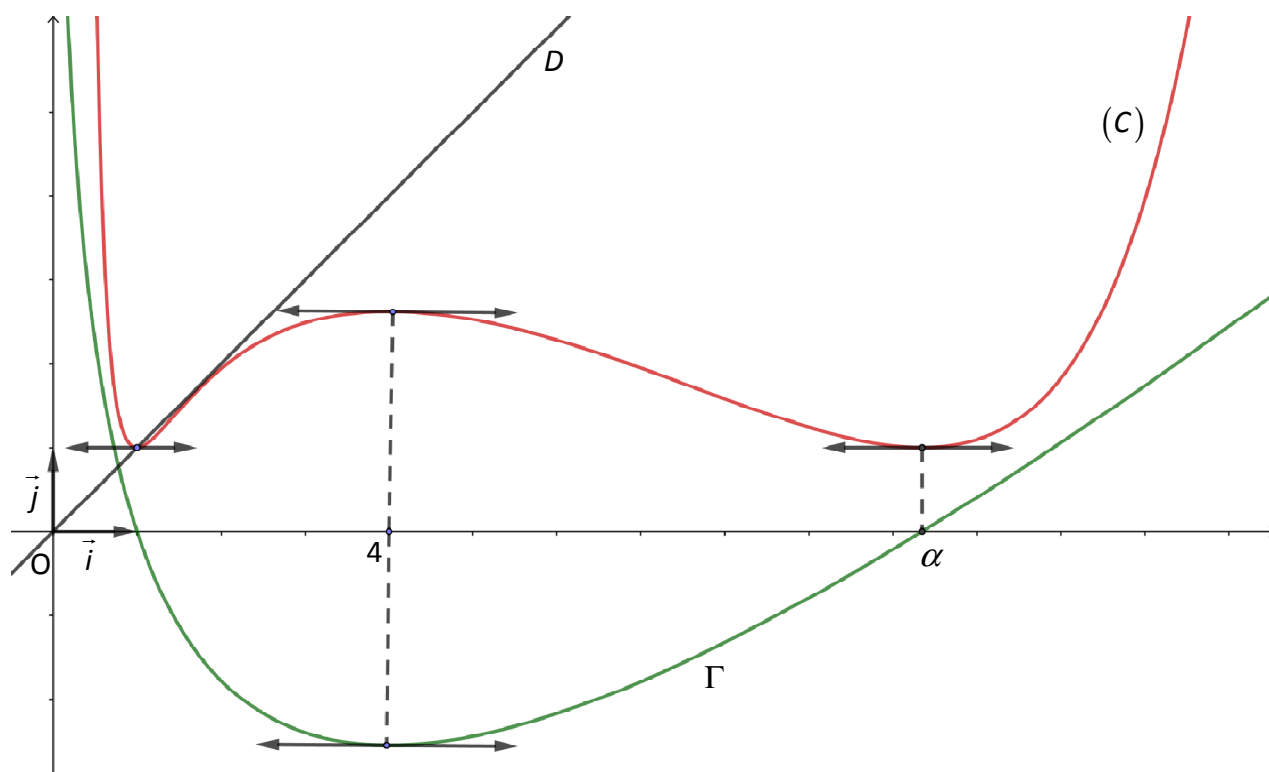
On a $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$ d'où

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(\ln 2)$	$+\infty$

On a $h(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$ donc $h(x) > 0$ pour tout réel x

b. Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $f(x) - u(x) = e^{u(x)} - 2u(x) > 0$ d'où (C) est au dessus de (Γ)

c.



4. a. On a

$$\begin{aligned} A' &= \int_3^5 |u(x)| dx = \int_3^5 -u(x) dx = \int_3^5 (-x + 1 + 4 \ln x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + 4x \ln x - 4x \right]_3^5 \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x \ln x - 3x \right]_3^5 = \left(-\frac{25}{2} + 20 \ln 5 - 15 \right) - \left(-\frac{9}{2} + 12 \ln 3 - 9 \right) = 20 \ln 5 - 12 \ln 3 - 14 \end{aligned}$$

b. On a pour tout $x \in [3; 5]$, $-u(x) < f(x) < f(4)$

$$\text{d'où } \int_3^5 -u(x) dx < \int_3^5 f(x) dx < \int_3^5 f(4) dx \text{ donc } A' < A < 2f(4)$$

or on a $A' \approx 5,00541 > 5$ et $2f(4) \approx 5,24 < 5,25$ d'où $5 < A < 5,25$