

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- Produit vectoriel dans l'espace
- Droites et plans de l'espace
- Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère
- Droite tangente à un cercle

1°) a) $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$,

$$\text{Donc } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 8\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) $O \in P \cap (OA)$ ①

$\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA} \perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) On a : $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ ainsi,

$$d(O, (BC)) = \frac{\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2}} = \sqrt{2}.$$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$ signifie $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$
signifie $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 11 > 0$

Donc (S) est la sphère de centre A(2,2,1) et de rayon $R = \sqrt{11}$.

3) a) $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

b) D'après la question 1-b), O est le projeté orthogonal de A sur le plan P, donc $d(A, P) = OA = 3 < R = \sqrt{11}$.

Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\sqrt{11}^2 - 3^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}.$$

c) $(BC) \subset P$; $C \subset P$ et $d(O, (BC)) = \sqrt{2}$ donc (BC) est tangente au cercle C .

4) a) On a : $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H \in (BC)$ (*).

$$OH = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} = r \quad (**).$$

D'après (*) et (**), on conclut que $(BC) \cap C = \{H\}$.

Exercice n°2 :

De quoi s'agit-il ?

- Résolution d'une équation du second degré dans IC
- Complexe et géométrie

1) a) $(\sqrt{5} + 2i)^2 = \sqrt{5}^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2i + (2i)^2 = 5 + 4i\sqrt{5} - 4 = 1 + 4i\sqrt{5}$.

b) $\Delta = \left[-(\sqrt{5} + 2i) \right]^2 - 4 \times 1 \times (1 + 4i\sqrt{5}) = (\sqrt{5} + 2i)^2 - 4(1 + 4i\sqrt{5}) = -3(\sqrt{5} + 2i)^2$.

c) $\Delta = -3(\sqrt{5} + 2i)^2 = \left[i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i) \right]^2$, donc $\delta = i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i)$ par suite :

$$a = \frac{\sqrt{5} + 2i + i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i)}{2} = \frac{(\sqrt{5} + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{2} = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{et } a = \frac{\sqrt{5} + 2i - i\sqrt{3}(\sqrt{5} + 2i)}{2} = \frac{(\sqrt{5} + 2i)(1 - i\sqrt{3})}{2} = (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Donc les solutions de (E) sont a et b.

2) a) $OQ = |z_Q| = |\sqrt{5} + 2i| = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, donc $Q \in C_{(O,3)} = C$.

b) $Q \in C \cap \{y = 2\}$, avec $\text{Re}(z_A) > 0$.

3) a) $OA = |a| = \left| (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} |(\sqrt{5} + 2i)| \cdot |1 + i\sqrt{3}| = \frac{1}{2} OQ \times \sqrt{4} = 3$. Donc $A \in C$.

$$OB = |b| = \left| (\sqrt{5} + 2i) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} |(\sqrt{5} + 2i)| \cdot |1 - i\sqrt{3}| = \frac{1}{2} OQ \times \sqrt{4} = 3$$
. Donc $B \in C$.

b) $z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}} = a + b = (\sqrt{5} + 2i) \left[\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right] = \sqrt{5} + 2i = z_Q = z_{\overrightarrow{OQ}}$.

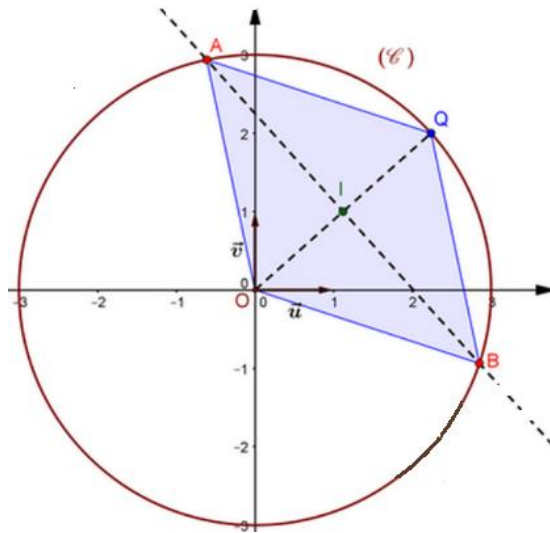
$$\text{Ainsi } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}.$$

c) On a : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ}$ donc le quadrilatère $OAQB$ est un parallélogramme, de plus $OA = OB$ ainsi $OAQB$ est un losange.

d) On construit le point I milieu du segment $[OQ]$

La perpendiculaire à (OQ) passant par I coupe le cercle C en A et B tel que

$$\text{Im}(z_A) > 0, \text{ car } a = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{2} + i \frac{2 + \sqrt{15}}{2} \text{ et } b = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{2} + i \frac{2 - \sqrt{15}}{2}.$$



Exercice n°3 :

De quoi s'agit-il ?

- Fonction en exponentielle (limites, variations, points d'inflexions, construction de points sur une représentation graphique donnée)
- Calcul d'aires
- Fonctions primitives
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

$$1) \quad a) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{-\infty} f = +\infty .$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty .$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{x} \cdot e^{-x} = -\infty .$$

(C) admet une branche parabolique de direction celle de $(0, \vec{j})$.

$$c) \quad \lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0 + 0 = 0 .$$

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$2) \quad a) \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x e^{-x} - e^{-x} \times (1+x^2) = (2x - (1+x^2)) e^{-x} \\ = (-x^2 + 2x - 1) e^{-x} = -(x^2 - 2x + 1) e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x} .$$

$$b) \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = 0 .$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$  0		

3) a) $T_0 : y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(0) = -e^0 = -1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\left[2 \times 1 \times (x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$.

$$= -e^{-x}(2x - 2 - x^2 + 2x - 1) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$$

$$= (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Ainsi A et B sont deux points d'inflexions de (C).

4) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x^2)e^{-x} = (1+x^2)g(-x)$.

Donc : $f(1) = 2g(-1)$ et $f(3) = 10g(-3)$.

b) $A(1; f(1))$ et $f(1) = 2g(-1) = 2y_E$, donc $A(1; 2y_E)$.

$B(3; f(3))$ et $f(3) = 10g(-3) = g(\ln(10) - 3) = y_F$, donc $B(3; y_F)$.

T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \frac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

5) a) T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \frac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

b) Voir figure.

6) a) Voir figure.

b) $x \mapsto -(x^2 + 2x + 3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} ; \quad F'(x) &= -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 3)\right] \\ &= -e^{-x}(2x+2 - x^2 - 2x - 3) = -e^{-x}(-x^2 - 1) \\ &= (1+x^2)e^{-x} = f(x). \end{aligned}$$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

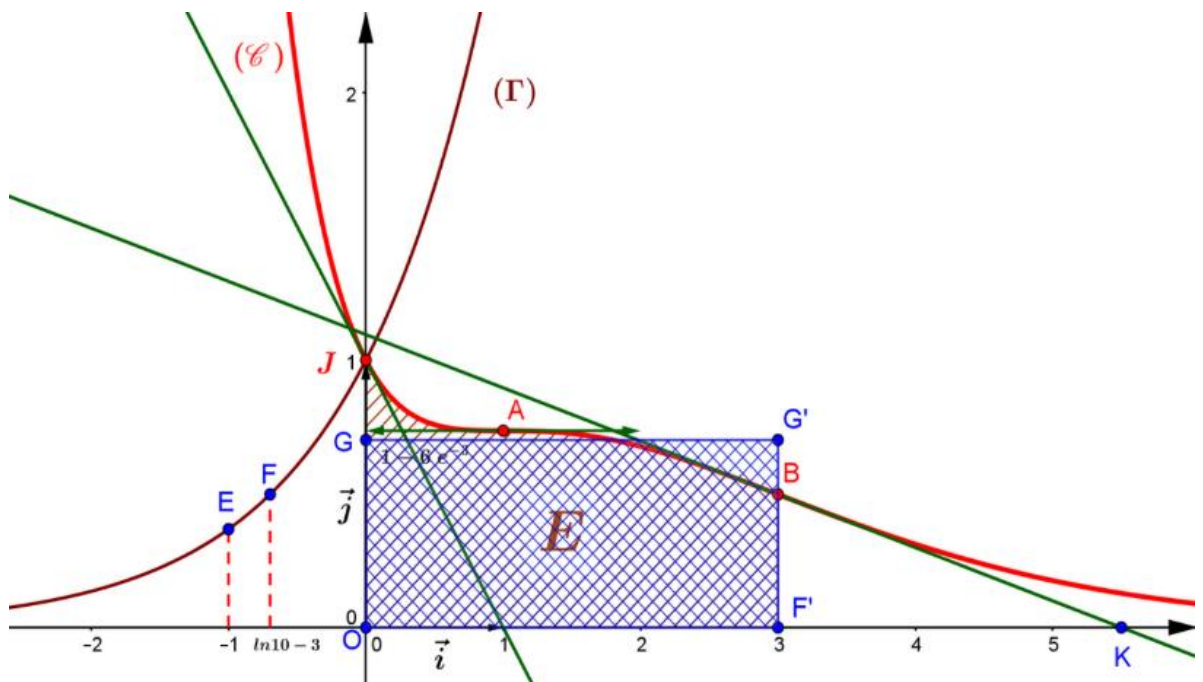
c) $S = \int_0^3 f(x) dx = [F(x)]_0^3 = F(3) - F(0) = -18e^{-3} + 3 = 3 - 18e^{-3}.$

d) $\bar{f} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} (3 - 18e^{-3}) = 1 - 6e^{-3}.$

e) $S = 3 \times \bar{f} = 3 \times (1 - 6e^{-3}).$

Soient $G'(3 ; 1 - 6e^{-3})$; $F'(3 ; 0)$ et A l'aire du rectangle $OF'G'G$,

Donc $S = OF' \times OG = A.$



Exercice n°4 :

De quoi s'agit-il ?

- Calcul de probabilité d'évènements
- Probabilité conditionnelle, probabilité totale
- Loi binomiale

1) a) $p(U) = 1 - p(\bar{U}) = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

b) $p(D/U) = \frac{92}{100} = 0,92$ et $p(D/\bar{U}) = \frac{55}{100} = 0,55$.

2) a) $p(D) = p(D \cap U) + p(D \cap \bar{U}) = p(D/U) \times p(U) + p(D/\bar{U}) \times p(\bar{U})$
 $= 0,92 \times 0,95 + 0,55 \times 0,05 = 0,9015$.

b) $p(U/D) = \frac{p(U \cap D)}{p(D)} = \frac{0,92 \times 0,95}{0,9015} = \frac{1748}{1803} \approx 0,9694$.

3) a) $p_n = 1 - \bar{p}_n$ avec $\bar{p}_n$ est la probabilité qu'aucune de ces femmes ait une grossesse multiple.
C'est à dire que n femmes ait une grossesse unique.

Ainsi : $p_n = 1 - (p(U/D))^n = 1 - (0,9694)^n$.

Autrement : X suit une loi binomiale de paramètres n ($n \geq 2$) et $p = p(\bar{U}/D)$

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,9694)^n.$$

b) $p_n > 0,9$ signifie $1 - (0,9694)^n > 0,9$

signifie $(0,9694)^n < 0,1$

signifie $\ln((0,9694)^n) < \ln(0,1)$

signifie $n \ln(0,9694) < \ln(0,1)$

signifie $n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9694)} \approx 74,09$ car $\ln(0,9694) < 0$.

Ainsi le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017
est $n = 75$.