

Corrigé**Exercice 1**

1. **Faux** : car

$$\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = \|2\overrightarrow{IC} \wedge 2\overrightarrow{ID}\| = 4\|\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{ID}\| = 4|IC \times ID \times \sin(DIC)| = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1\right) = 2 \text{ par}$$

contre $\|\overrightarrow{AE}\| = 1$

2. **Vrai**: En effet , les vecteurs $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires donc $(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IJ}) = 0$.

3. **Faux** : car la sphère de diamètre [AC] est de centre I donc son rayon est égal à $\frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la

distance du point I au plan $z-1=0$ est égale à $IJ = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'intersection de la sphère et le plan est vide.

Exercice 2

I. 1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$. Ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

$0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il en résulte que l'équation

$x^3 + 6x + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

2) $f(-0.4) = -0.464 < 0$, $f(-0.3) = 0.173 > 0$, $f(-0.4) \times f(-0.3) < 0$ donc $-0.4 < \alpha < -0.3$.

II. 1) a) $z^3 = 2 \Leftrightarrow z^3 = 2e^{i0} \Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi les solutions de l'équation

(E_1) sont $a_1 = z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i0} = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) $z^3 = -4 \Leftrightarrow z^3 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi les solutions de l'équation

(E_2) sont $b_1 = z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{4}$, $b_2 = z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$$a_1 b_1 = -\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$c) a_2 b_2 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{2\pi}{3}} \sqrt[3]{4} e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{8} = -2 \quad . \text{Ainsi } a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2.$$

$$a_3 b_3 = \sqrt[3]{2} e^{i \left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \sqrt[3]{4} e^{i \left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{8} e^{i(-\pi)} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$2) a) (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -2 - 6(a+b).$$

b) On sait que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b) \Leftrightarrow (a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$, il en résulte que $(a+b)$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

3) On sait que $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$ et $a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3 = a_3^3 + b_3^3 = -2$ donc d'après 2)b)

$a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ et $a_3 + b_3$ sont des solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$, or l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est de troisième degré donc elle admet dans $\mathbb{C}$ au plus trois solutions.

On en déduit que les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ sont :

$$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, a_2 + b_2 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4} e^{i \frac{\pi}{3}} \text{ et } a_3 + b_3 = \sqrt[3]{2} e^{i \left(-\frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{4} e^{i \left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

4) L'unique solution réelle de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, d'où

$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ il en résulte que $\alpha = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3

1) Puisque le nombre de mouches après 69 jours est 1034 et il reste le même après 75 jours, il semble alors que le nombre de mouche resterait constant (c'est-à-dire 1034) après 85 jours.

$$2) a) r = \frac{\text{cov}(T, M)}{\sigma_T \sigma_M} = -0.996.$$

$$b) M = aT + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(T, M)}{\sigma_T^2} = -0.155 \text{ et } b = \bar{M} - a\bar{T} = 4.036. \text{ Ainsi } M = -0.155T + 4.036.$$

$$3) a) \text{ On sait que } M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1035}{N} - 1 = e^M \Leftrightarrow \frac{1035}{N} = e^M + 1 \Leftrightarrow N = \frac{1035}{e^M + 1}.$$

$$b) \text{ D'après 2)b) } M = -0.155T + 4.036 \text{ et d'après 3)a) } N = \frac{1035}{e^M + 1}, \text{ il en résulte que}$$

$$N = \frac{1035}{e^{-0.155T+4.036} + 1} = \frac{1035}{1 + e^{4.036 - 0.155T}}. \text{ Ainsi } \alpha = e^{4.036} \text{ et } \beta = -0.155.$$

- c) En changeant T par 85, on obtient $N = \frac{1035}{1 + e^{4.036 - 0.155 \times 85}} = 1034,8 \approx 1034$ mouches, on peut donc valider la conjecture émise en 1).

Exercice 4

1) Voir figure.

2) a) $f(5) = \ln(5 + \sqrt{25 - 9}) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln 3.$

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ} = MP \times PN = (5 - 3)(f(5) - \ln 3) = 2(2\ln 3 - \ln 3) = 2\ln 3.$

$$A_{MPN} = \frac{MP \times PN}{2} = \frac{2\ln 3}{2} = \ln 3.$$

d) $A_{MPN} \leq A \leq A_{MPNQ}$ donc $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3.$

3) a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 9} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3, +\infty[$ sur $f([3, +\infty[) = [f(3), \lim_{+\infty} f] = [\ln 3, +\infty[.$

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y = x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3, 0)$, $Q'(2\ln 3, 0)$, $N'(2\ln 3, 5)$ et $P'(\ln 3, 5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle $M'Q'N'P'$ et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \ln 3$ et $x = 2\ln 3$.

$A' = A_{M'Q'N'P'} - B$. Or $A_{M'Q'N'P'} = M'P' \times M'Q' = 5(2\ln 3 - \ln 3) = 5\ln 3$ et $B = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x) dx$, on en déduit que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x) dx.$

6) a) Pour tout $x \in [\ln 3, +\infty[$ et $y \in [3, +\infty[$

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 - 9}) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = (e^x - y)^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ye^x = e^{2x} + 9 \\ e^x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{e^{2x} + 9}{2e^x} \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{e^x + 9e^{-x}}{2} \\ e^x \geq y \end{cases}. \text{ On en déduit que pour tout}$$

$$x \in [\ln 3, +\infty[, g(x) = \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}.$$

$$b) \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x) dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - 9e^{-x}}{2} \right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4 \text{ donc } A' = (5\ln 3 - 4) \text{ u.a. et puisque } E$$

et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4) \text{ u.a.}$

