

**Matière : Mathématiques****Exercice 1 ( QCM)****Contenu :** Nombres complexes, Equations différentielles.**Aptitudes visées :** Déterminer un argument d'un nombre complexe, Reconnaître que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux, Résoudre une équation différentielle du programme.

1) (a)

Justification ( non demandée ) :  $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  alors  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ 

2) (c)

Justification ( non demandée ) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{CD} = \frac{-3}{2} \overrightarrow{AB}$$

3) (b)

Justification ( non demandée ) : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  ( $a \neq 0$ ) est l'ensemble des fonctions  $f: x \mapsto k e^{ax} - \frac{b}{a}$ , où  $k$  est un réel**Exercice 2****Contenu :** Limites- continuité- dérivabilité d'une fonction, théorème de la bijection, calcul d'aire plane.**Aptitudes visées :** Reconnaître que le nombre dérivé en  $a$  est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$ , interpréter graphiquement les limites en termes d'asymptotes ou des branches paraboliques, tracer la courbe de la réciproque d'une fonction donnée, calculer une intégrale à l'aide d'intégration par parties, calculer une aire plane.

1) a)

$$* f(0) = 0, f(2) = 2, f(2e) = 0, f'(2) = 0$$

 $f'(2e)$  désigne la pente de la tangente (AC) à la courbe  $\Gamma$  Au point A

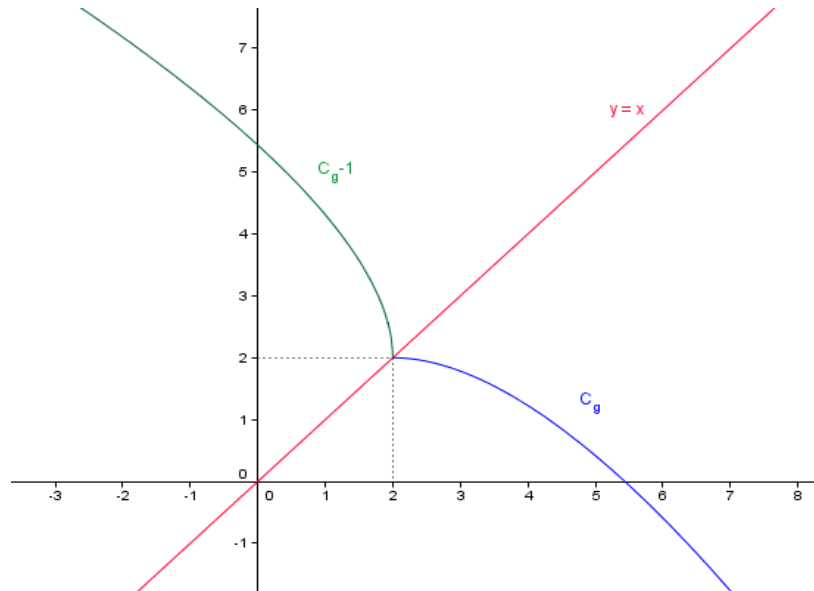
$$f'(2e) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

c) La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[2, +\infty[$  alors  $g$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  sur  $g([2, +\infty[)$ .

De plus  $g$  est continue sur  $[2, +\infty[$  alors  $g([2, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), g(2) \right] = ]-\infty, 2]$ .

2)  $(C')$  est l'image de  $(C)$  par la symétrie orthogonale d'axe  $D : y = x$



3)

$$b) \int_2^{2e} g(x) dx = \int_2^{2e} x(1 + \ln(2) - \ln(x)) dx$$

$$\begin{cases} u(x) = 1 + \ln(2) - \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_2^{2e} g(x) dx = \left[ \frac{x^2}{2} [1 + \ln(2) - \ln(x)] \right]_2^{2e} + \frac{1}{2} \int_2^{2e} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} (\ln(2) - \ln(x)) + \frac{3x^2}{4} \right]_2^{2e}$$

$$\int_2^{2e} g(x) dx = 2e^2(1 + \ln(2) - \ln(2) - 1) + e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3$$

c) Par symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , on en déduit que l'aire de la partie D est :

$$A = 4 + 2 \int_2^{2e} g(x) dx = 2(e^2 - 1) \text{ (u a).}$$

### Exercice 3

**Contenu:** Suites réelles

**Aptitudes visées:** Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, reconnaître que deux suites sont adjacentes.

1) a)  $(2n+2) - e(2n+1) = 2n+2-2ne-e = 2n(1-e)+2-e < 0$ .

b)

$$* u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \frac{k}{e^k}$$

$$u_{2n+2} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}} + (-1)^{2n+2} \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}}$$

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = \frac{1}{e^{2n+2}} [(2n+2) - e(2n+1)] < 0 \quad (\text{d'après 1) a) })$$

2)

$$* u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{k}{e^k} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k \frac{k}{e^k}$$

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} \frac{2n+2}{e^{2n+2}} + (-1)^{2n+3} \frac{2n+3}{e^{2n+3}} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2n+3}{e^{2n+3}}$$

$$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2n+3}{e^{2n+3}} = \frac{1}{e^{2n+3}} [(2n+2)e - (2n+3)]$$

$$* (2n+2)e - (2n+3) = 2ne+2e-2n-3 = 2n(e-1)+2e-3 > 0$$

$$3) a) u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}}$$

$$u_{2n+1} - u_{2n} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} < 0$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(2n+1)e^{-(2n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} Ne^N = 0$$

( En posant  $N = 2n+1$  )

4)  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$

- $v$  décroissante
- $w$  croissante.
- $v_n \succ w_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$

Alors les suites  $v$  et  $w$  sont adjacentes. (  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  )

La suite  $u$  est alors convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

$v_1 \succ v_n \succ w_n \succ w_1$  alors  $u_2 \succ v_n \succ u_3$  d'où  $u_2 \succ \alpha \succ u_3$

#### Exercice 4

**Contenu:** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, distance d'un point à un plan, calcul de volumes, section d'une sphère par un plan.

**Aptitudes visées:** Exploiter le produit scalaire dans l'espace, exploiter les propriétés du produit vectoriel, déterminer la section d'une sphère par un plan.

1) a) On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{N} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b)  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) On désigne par  $\mathcal{V}$  le volume du tétraèdre OABC .

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\vec{N} \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6} |24 + 8 - 48| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ (unités de volume).}$$

Autrement:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})|$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -44 + 28 = -16$$

$$2) \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times OH \text{ où } \mathcal{B} \text{ est l'aire de la base ABC.}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{N}\| = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 16 + 64} = 6 \text{ (unités d'aire)}$$

$$OH = \frac{3 \times \mathcal{V}}{\mathcal{B}} = \frac{3 \times \frac{8}{3}}{6} = \frac{4}{3}$$

**Autrement:**  $\vec{N} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $P = (ABC)$ .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow -8(x-3) - 4(y-2) + 8(z-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 2z + 4 = 0$$

$$OH = d(O, P) = \frac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3}$$

$$3) a) d(O, P) = \frac{4}{3} \text{ et } R = OA = \sqrt{9+4+36} = 7.$$

$d(O, P) < R \Rightarrow S \cap P = (C)$  où  $(C)$  est le cercle de centre H.

$$b) \text{ Si } r \text{ est le rayon du cercle } (C) \text{ alors: } r = \sqrt{49 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{\sqrt{425}}{3} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

## Exercice 5

**Contenu:** Série statistique à deux caractères : ajustement affine.

**Aptitudes visées:** Décider à partir d'un nuage de points, de l'utilité d'un ajustement affine, calculer le coefficient de corrélation linéaire et interpréter le résultat.

1) Non, la forme du nuage n'est pas allongée.

2)

$$a) \bar{X} = 119,6 \quad \sigma_X = 25,36$$

$$b) \bar{Y} = 25,12 \quad \sigma_Y = 11,75$$

$$c) \rho_{XY} = 0,965$$

$$3) Y = 2,1463 \cdot e^{0,0197 \times 165} = 55,4 \text{ kg}$$