

❖ Exercice 1 ► 3 points

I) 1) a) ♦ La droite de régression de P en X est $\Delta : P = -5.5X + 92.2$

I) 1) b) ♦ Pour $X = 14$, la quantité de lumière traversant le liquide est :

$$P = -5.5 \times 14 + 92.2 = 15.2 \%$$

I) 2) a) ♦ Tracer la droite Δ (Annexe).

► On a $-5.5X + 92.2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{92.2}{5.5} \approx 16.8 \text{ cm}$ donc le point est de coordonnées (16.8, 0)

I) 2) b) ♦ Comme $17 > 16.8$ alors la quantité de lumière traversant le liquide est $P = 0 \%$.

II) 1) ► Le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y) est : $r = -0.9996$.

► $|r| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors un ajustement affine est justifié.

II) 2) ♦ On a $Y = -0.1X + 4.61$ alors $\ln(P) = -0.1X + 4.61$ donc $P = e^{-0.1X + 4.61}$

$$\text{d'où } P = e^{4.61} e^{-0.1X} \text{ ainsi } P = 100 e^{-0.1X}.$$

II) 3) ♦ Pour $X = 20$, la quantité de lumière traversant le liquide est :

$$P = 100 e^{-0.1 \times 20} = 100 e^{-2} \approx 13.5 \%$$

❖ Exercice 2 ► 5 points

$$1) a) \diamond (2 + 2\sqrt{3}i)^2 = 4 + 8\sqrt{3}i - 12 = -8 + 8i\sqrt{3}$$

$$1) b) (E): z^2 - 4iz - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$$

$$\diamond \Delta = (-4i)^2 - 4(-2 - 2i\sqrt{3}) = -16 + 8 + 8i\sqrt{3} = -8 + 8i\sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{3}i)^2$$

alors une racine carré de Δ est $\delta = 2 + 2\sqrt{3}i$

$$\text{d'où } \triangleright z_1 = \frac{4i + 2 + 2\sqrt{3}i}{2} = \frac{2 + (4 + 2\sqrt{3})i}{2} = 1 + i(2 + \sqrt{3}).$$

$$\triangleright z_2 = \frac{4i - 2 - 2\sqrt{3}i}{2} = \frac{-2 + (4 - 2\sqrt{3})i}{2} = -1 + i(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{C}} = \{1 + i(2 + \sqrt{3}), -1 + i(2 - \sqrt{3})\}$$

$$2) a) \triangleright z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

► Construire le point A (Annexe).



2) b) ♦ $z_A + z_K = 1 + i\sqrt{3} + 2i = 1 + i(2 + \sqrt{3}) = z_B$ alors $z_{\overline{OA}} + z_{\overline{OK}} = z_{\overline{OB}}$

D'où $OABK$ est un parallélogramme.

♦ Comme $OA = |z_A| = 2$ et $OK = |z_K| = 2$ alors $OA = OK$

Ainsi $OABK$ est un losange.

► Construire le point B (Annexe).

2) c) ♦ $z_K = 2i$, $z_B = 1 + i(2 + \sqrt{3})$ et $z_C = -1 + i(2 - \sqrt{3})$.

► $\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + i(2 + \sqrt{3}) - 1 + i(2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{4i}{2} = 2i = z_K$ alors $K = B * C$.

► Construire le point C (Annexe)

3) a) ♦ $i(2 - \sqrt{3})z_B = i(2 - \sqrt{3})(1 + i(2 + \sqrt{3})) = i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = i(2 - \sqrt{3}) - 1 = z_C$

Ainsi $z_C = i(2 - \sqrt{3})z_B$

3) b) On a $z_C = i(2 - \sqrt{3})z_B$ alors $\frac{z_C}{z_B} = i(2 - \sqrt{3})$ donc $\frac{z_{\overline{OC}}}{z_{\overline{OB}}} = i(2 - \sqrt{3}) \in i\mathbb{R}$ d'où $\overline{OC} \perp \overline{OB}$

Ainsi le triangle OBC est rectangle en O .

4) a) ♦ Comme les points O, A et D sont alignés alors les vecteurs $\overline{OD}$ et $\overline{OA}$ sont colinéaires

donc $\frac{z_{\overline{OD}}}{z_{\overline{OA}}} \in \mathbb{R}$ ainsi $\frac{z_D}{z_A}$ est un nombre réel.

4) b) ♦ $z_D = tz_A$ et $z_D = 2i$

► $KD = |z_D - z_K| = |tz_A - 2i| = |t + i\sqrt{3}t - 2i| = |t + i(\sqrt{3}t - 2)| = \sqrt{t^2 + 3t^2 - 4\sqrt{3}t + 4}$

alors $KD^2 = 4t^2 - 4\sqrt{3}t + 4 = 4(t^2 - \sqrt{3}t + 1)$

4) c) ♦ Comme le triangle OBC est rectangle en O alors $K = B * C$ est le centre du cercle ξ

d'où $KD = KO = 2$ alors $KD^2 = 4(t^2 - \sqrt{3}t + 1) = 4$ donc $t^2 - \sqrt{3}t + 1 = 1$

alors $t(t - \sqrt{3}) = 0$ d'où $t = 0$ ou $t = \sqrt{3}$ et comme $z_D = tz_A \neq 0$ alors $t \neq 0$ d'où $t = \sqrt{3}$.

ainsi $z_D = \sqrt{3}z_A = \sqrt{3}(1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 3i$



❖ Exercice 3 ▶ 5 points

1) a) ♦ $B(2,2,-1)$, $C(-2,0,-1)$ et $\Omega(1,-1,-3)$ ▶ $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) b) ▶ $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ est un vecteur normal au plan $P = (OBC)$

alors $P: -2x + 4y + 4z + d = 0$ et comme $O \in P$ alors $d = 0$

d'où $P: -2x + 4y + 4z = 0$ ainsi $P: x - 2y - 2z = 0$

1) c) ♦ $\Omega(1,-1,-3): 1 + 2 + 6 = 9 \neq 0$ alors $\Omega \notin P$.

♦ $\mathcal{V}_{OBC\Omega} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{O\Omega}| = \frac{1}{6} |-2 - 4 - 12| = \frac{1}{6} |-18| = 3$

2) a) ♦ $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + (z+3)^2 - 9 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 14 = \sqrt{14}^2$

Ainsi S est la sphère de centre $\Omega(1,-1,-3)$ et de rayon $R = \sqrt{14}$.

2) b) ♦ $d(\Omega, P) = \frac{|1+2+6|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{3} = 3 < \sqrt{14}$ alors P coupe S suivant le cercle ξ :

• de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\sqrt{14}^2 - 3^2} = \sqrt{14 - 9} = \sqrt{5}$.

• Comme $\left\{ \begin{array}{l} H(0,1,-1): (0-2+2=0) \Rightarrow H \in P \\ \overrightarrow{\Omega H} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{N_P} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ alors H est le projeté orthogonal de Ω sur P .

Ainsi $(\mathcal{C})$ est de centre $H(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2) c) ✓ $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-1-1}{2} \right) = (0,1,-1)$ alors $H = B * C$

✓ $B(2,2,-1): (2-1)^2 + (2+1)^2 + (-1+3)^2 = 14 \Rightarrow B \in S$ et comme $B \in P$ alors $B \in P \cap S = \xi$

Ainsi $[BC]$ est un diamètre du cercle ξ .

3) a) ♦ $P_a: ax - 2ay - 2z + 2(a-1) = 0$

Pour tout réel a : ✓ $B(2,2,-1): 2a - 4a + 2 + 2a - 2 = 0$ alors $B \in P_a$.

✓ $C(-2,0,-1): -2a + 0 + 2 + 2a - 2 = 0$ alors $C \in P_a$.

Ainsi pour tout réel a , $(BC) \subset P_a$.

3) b) ♦ Comme $B, C \in P_a$ et $B, C \in \xi \subset S$ alors S et P_a sont sécants.

3) c) ♦ S et P_a sont sécants suivant un cercle ξ_a contenant les points B et C

alors le cercle ξ_a est de diamètre $2r_a$ supérieur ou égal à $BC = 2\sqrt{5}$

donc ξ_a est de rayon $r_a \geq \sqrt{5}$

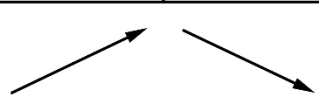


❖ Exercice 4 ▶ 7 points

A) 1) ♦ $g(x) = \ln x - \frac{x}{e}$; g est dérivable sur $]0, +\infty[$

► Pour tout $x \in]0, +\infty[: g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$

alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

A) 2) ♦ $g(e) = 0$.

♦ g admet sur $]0, +\infty[$ un maximum global en e égal à $g(e) = 0$ alors $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) \leq 0$
d'où pour tout $x > 0$, $\ln x - \frac{x}{e} \leq 0$ ainsi $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

B) 1) a) $f(x) = x + \ln x + \frac{\ln x}{x}$; $x \in]0, +\infty[$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{x}_{0} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-\infty} \right) = -\infty$.

► La droite $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

B) 1) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 \right) = +\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_0 \right) = 1$.

B) 1) c) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 \right) = +\infty$

alors la droite $\Delta : y = x$ est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

B) 1) d) ♦ Pour tout $x \in]0, +\infty[: f(x) - x = \ln x + \frac{\ln x}{x} = \ln x \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ alors $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+
$\left(\begin{smallmatrix} \text{Position} \\ \mathcal{C}_f \text{ et } \Delta \end{smallmatrix} \right)$	$\frac{\Delta}{\mathcal{C}_f}$	$\begin{smallmatrix} \\ (1,1) \end{smallmatrix}$	$\frac{\mathcal{C}_f}{\Delta}$

B) 2) a) ♦ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[:$

► $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{(x - \ln x) + x^2 + 1}{x^2}$.

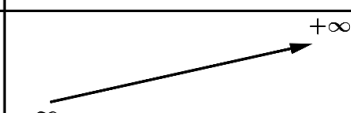
B) 2) b) ♦ On a $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x \leq \frac{x}{e} < x$ alors $x - \ln x > 0$ d'où $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.



B) 2) c)

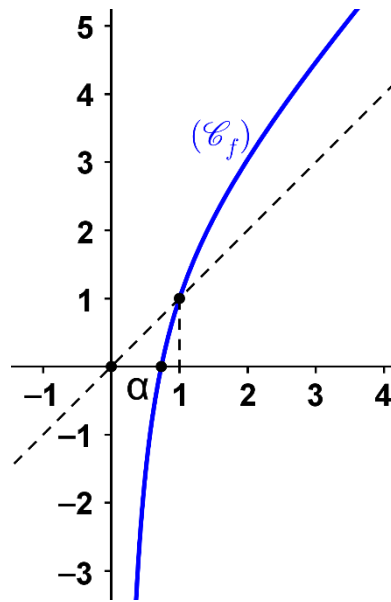
♦ Le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		

B) 3) a) ♦ f est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .

$$\blacktriangleright \begin{cases} f(0.7) \approx -0.166 < 0 \\ f(0.8) \approx 0.297 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0.7 < \alpha < 0.8$$

B) 3) b)

♦ La courbe $(\mathcal{C}_f)$.

B) 3) c) ♦ $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x| dx = \int_1^e (f(x) - x) dx = \int_1^e (\ln x + \frac{\ln x}{x}) dx$

$$\mathcal{A} = \left[x \ln x - x + \frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e = \left(\frac{1}{2} \right) - (-1) = \frac{3}{2} \text{ u.a}$$

B) 4) a) ♦ $u_n = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot (\ln x)^n dx ; n \geq 1.$

On a $1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e} \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq \frac{1}{e^n} x^n$ et comme $\forall x \in [1, e], 0 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 2$

A) 2)

alors $0 \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot (\ln x)^n \leq \frac{2}{e^n} x^n$, comme ces fonctions sont continues sur $[1, e]$

alors $0 \leq u_n \leq \frac{2}{e^n} \int_1^e x^n dx$

B) 4) b) ♦ On a $\frac{2}{e^n} \int_1^e x^n dx = \frac{2}{e^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^e = \frac{2}{e^n} \left(\frac{e^{n+1} - 1}{n+1} \right) = 2 \left(\frac{e}{n+1} - \frac{1}{e^n(n+1)} \right)$

$$\blacktriangleright \begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2 \left(\frac{e}{n+1} - \frac{1}{e^n(n+1)} \right) ; n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{e}{n+1} - \frac{1}{e^n(n+1)} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

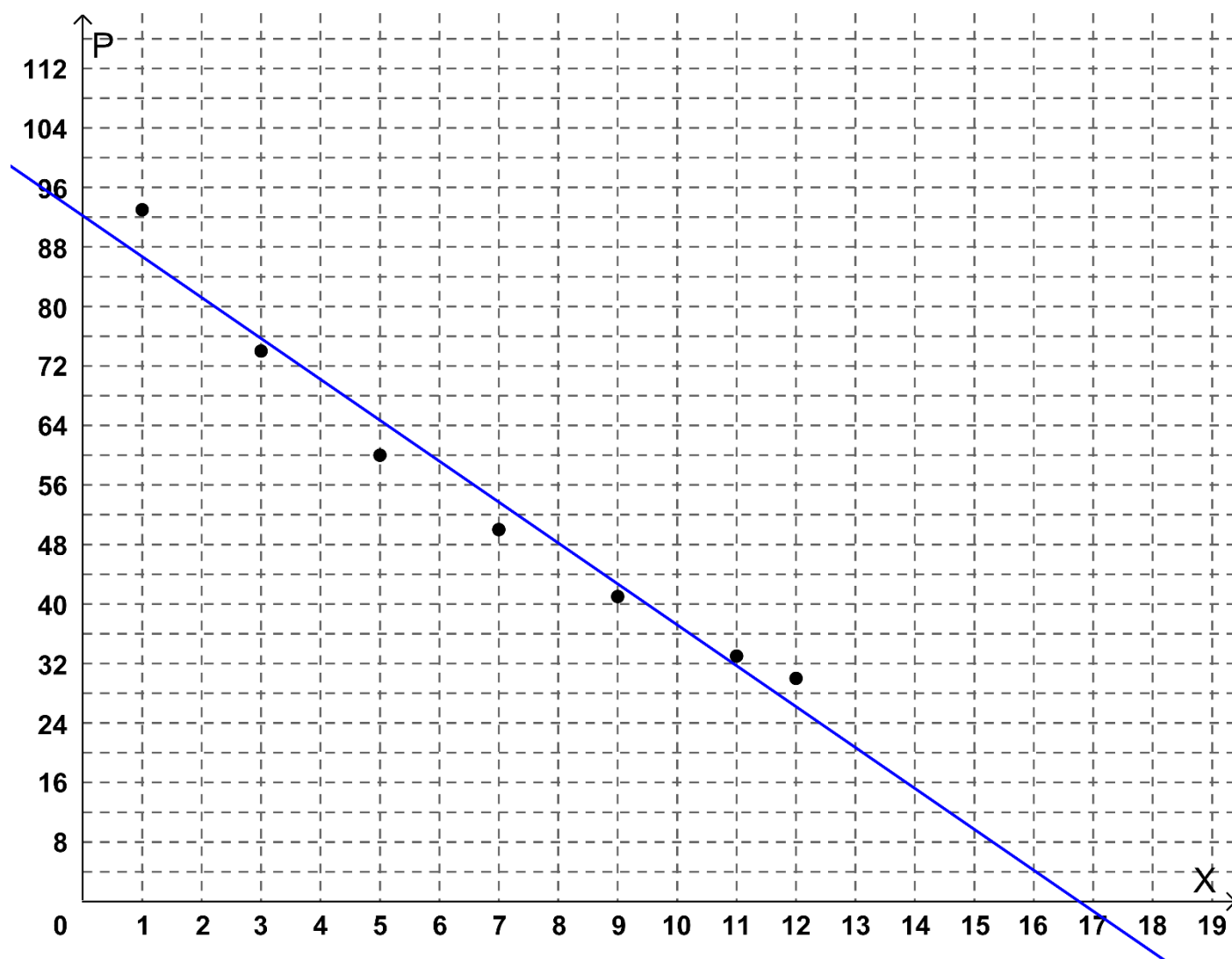


Figure 2

