

❖ Exercice 1 ► 3 points

1) a) ♦ Le coefficient de corrélation linéaire entre R et Y est : $r = 0.9$.

1) b) ♦ La droite de régression de Y en R est : $Y = R + 68.4$

1) c) ♦ Le rang de l'année 2025 est $R = 12$ donc $Y = 12 + 68.4 = 80.4$ habitants par km^2 .

2) a) ♦ Le nuage de points de la série (X, Y) à une forme allongée donc un ajustement affine est justifié

2) b) ♦ Pour $R = 12$, $X = \ln 12$

► Selon ce deuxième modèle la densité démographique en Tunisie pour l'année 2025 est :
 $Y = 3.8 \ln(12) + 67.9 \approx 77.3$ habitants par km^2 .

3) ♦ Selon le modèle 1 : $163610 \times 80.4 = 13\,154\,244$ habitants.

♦ Selon le modèle 2 : $163610 \times 77.3 = 12\,647\,053$ habitants.

❖ Exercice 2 ► 5 points

1) a) $(E): z^2 - 4iz - 6 + 2i\sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (-4i)^2 - 4(-6 + 2i\sqrt{3}) = -16 + 24 - 8i\sqrt{3} = 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$\text{► Comme } (2\sqrt{3} - 2i)^2 = 12 - 8\sqrt{3}i - 4 = 8 - 8i\sqrt{3} \text{ alors } \Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2$$

1) b) $\Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2$ donc une racine carrée de Δ est $\delta = 2\sqrt{3} - 2i$

$$\text{d'où } \text{► } z_1 = \frac{4i + 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i.$$

$$\text{► } z_2 = \frac{4i - 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{-2\sqrt{3} + 6i}{2} = -\sqrt{3} + 3i$$

$$\text{Ainsi } S_C = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + 3i\}$$

2) a) ♦ $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

$$\text{► } OA = |z_A| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2 \text{ alors } A \in (\mathcal{C}).$$

2) b) ♦ $z_K = 2i$, $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -\sqrt{3} + 3i$.

$$\text{► } \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i = z_K \text{ alors } K = A * B.$$

2) c) ♦ Placer les points A et B : (Annexe).

► $A \in (\mathcal{C}) \cap (y = 1)$ avec $\operatorname{Re}(z_A) > 0$. ► B est le symétrique de A par rapport à K .

$$3) \text{ ♦ } z_A - z_B = \sqrt{3} + i - (-\sqrt{3} + 3i) = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



4) a) ♦ $2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 2i \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right) e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta} - e^{i0} = e^{i\theta} - 1.$

► Ainsi $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$

4) b) ♦ $\frac{z_F - z_E}{z_A - z_B} = \frac{2e^{i\theta} - 2}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{2(e^{i\theta} - 1)}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{4i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$

4) c) ♦ $\frac{z_F - z_E}{z_A - z_B} = i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} ; z_F = 2e^{i\theta}$

► $(AB) \perp (EF) \Leftrightarrow \frac{z_{\overline{EF}}}{z_{\overline{BA}}} = \frac{z_F - z_E}{z_A - z_B} = i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \in \mathbb{R}$

Comme $E \neq F$ alors $\theta \neq 2n\pi ; n \in \mathbb{Z}$ d'où $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0.$

► $e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ainsi } z_F = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

4) d) ♦ $z_B = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

► $\frac{z_{\overline{OB}}}{z_{\overline{OF}}} = \frac{z_B}{z_F} = \frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3} e^{i\pi} = -\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

alors $\overline{OB}$ et $\overline{OF}$ sont colinéaires ainsi les points O, B et F sont alignés.

❖ Exercice 3 ► 4.5 points

1) a) ♦ $A(2, 2, \sqrt{2}), B(1, 3, 0)$ et $C(3, 1, 0)$

► $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

1) b) ► $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés ainsi les points A, B et C déterminent un plan P .

► $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $P = (ABC)$

alors $P: -2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + d = 0$ et comme $A(2, 2, \sqrt{2}) \in P$ alors $d = 8\sqrt{2}$

d'où $P: -2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 8\sqrt{2} = 0$ ainsi $P: x + y - 4 = 0$



2) ♦ $d(I, P) = \frac{|3+3-4|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2$ alors P coupe (S) un cercle $(\mathcal{C})$:

• de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.

• Comme $\left\{ \begin{array}{l} H(2,2,0) : (2+2-4=0) \Rightarrow H \in P \\ \overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$ alors H est le projeté orthogonal de I sur P .

Ainsi $(\mathcal{C})$ est de centre $H(2,2,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3) a) ♦ $(S_\alpha) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cos \alpha + 2y \cos \alpha - 2\sqrt{2}z \sin \alpha - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \cos \alpha)^2 - \cos^2 \alpha + (y + \cos \alpha)^2 - \cos^2 \alpha + (z - \sqrt{2} \sin \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \cos \alpha)^2 + (y + \cos \alpha)^2 + (z - \sqrt{2} \sin \alpha)^2 - 2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \cos \alpha)^2 + (y + \cos \alpha)^2 + (z - \sqrt{2} \sin \alpha)^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

Ainsi (S_α) est la sphère de centre $J(\cos \alpha, -\cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha)$ et de rayon $R_\alpha = 2\sqrt{2}$.

3) b) ♦ $d(J, P) = \frac{|\cos \alpha - \cos \alpha - 4|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R_\alpha$ alors (S_α) est tangente au plan P .

♦ $K(2 + \cos \alpha, 2 - \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha)$:

• $(2 + \cos \alpha - \cos \alpha)^2 + (2 - \cos \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sqrt{2} \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha)^2 = 4 + 4 + 0 = 8$ alors $K \in (S_\alpha)$.

• $2 + \cos \alpha + 2 - \cos \alpha - 4 = 0$ alors $K \in P$.

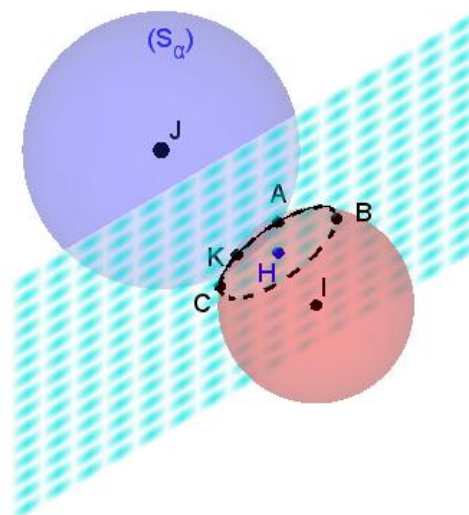
► ainsi (S_α) et P sont tangents au point K .

3) c) ► $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} \cos \alpha - 1 \\ -\cos \alpha - 1 \\ \sqrt{2} \sin \alpha \end{pmatrix}$ alors $IK = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 + 2 \sin^2 \alpha}$

d'où $IK = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1 + 2 \sin^2 \alpha}$

ainsi $IK = \sqrt{2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1)} = \sqrt{4} = 2$

3) d) ♦ $\begin{cases} IK = 2 \Rightarrow K \in S \\ K \in P \\ P \cap S = (\mathcal{C}) \end{cases}$ alors $K \in (\mathcal{C})$.



❖ Exercice 4 ▶ 7.5 points

1) a) $f(x) = (1 - \frac{1}{x}) \ln x$; $x \in]0, +\infty[$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(1 - \frac{1}{x})}_{-\infty} \underbrace{\ln x}_{-\infty} = +\infty.$

♦ La droite $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(1 - \frac{1}{x})}_1 \underbrace{\ln x}_{+\infty} = +\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(1 - \frac{1}{x})}_1 \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 = 0.$

♦ $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) ♦ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[:$

► $f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} (1 - \frac{1}{x}) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}.$

2) b) ♦ $f'(1) = 0$

2) c) ♦ Pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 1 + \ln x)$

Soit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h(x) = x - 1 + \ln x$ alors $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

alors h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et comme $h(1) = 0$

alors $h(x) > 0$ si et seulement si, $x \in]1, +\infty[$.

Ainsi $f'(x) > 0$ si et seulement si, $x \in]1, +\infty[$.

2) d)

♦ Le tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

3) a) ♦ Pour tout $x \in]0, +\infty[; f(x) - \ln x = (1 - \frac{1}{x}) \ln x - \ln x = -\frac{1}{x} \ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - \ln(x)$		$\ominus$	$-$
$\left(\begin{array}{c} \text{Position} \\ (\mathcal{C}_f) \text{ et } (\Gamma) \end{array} \right)$	$\frac{(\mathcal{C}_f)}{(\Gamma)}$	$\frac{(\Gamma)}{(\mathcal{C}_f)}$ (1,0)	

3) b) ♦ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (Annexe).



$$4) a) \diamond \lambda \in]1, +\infty[: \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^\lambda \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\ln x}_u dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^\lambda = \frac{1}{2} \ln^2 \lambda.$$

$$4) b) \diamond \mathcal{A}(\lambda) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^\lambda |f(x) - \ln x| dx = \int_{\frac{1}{\lambda}}^\lambda \left| -\frac{1}{x} \ln x \right| dx = \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) dx + \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x} \ln x \right) dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \left(\frac{1}{x} \ln x \right) dx + \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x} \ln x \right) dx = \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \ln^2(\lambda) = \frac{1}{2} \ln^2(\lambda) + \frac{1}{2} \ln^2(\lambda)$$

Ainsi $\mathcal{A}(\lambda) = \ln^2(\lambda)$

$$4) c) \diamond \mathcal{A}(\lambda_0) = a^2 \Leftrightarrow \ln^2(\lambda_0) = a^2$$

Comme $a, \lambda_0 \in]1, +\infty[$ alors $\ln(\lambda_0) = a$ d'où $\lambda_0 = e^a$.

$$4) d) \diamond \text{Placer } \lambda_0 \text{ et } \frac{1}{\lambda_0} \text{ sur l'axe des abscisses. (Annexe).}$$

► $\ln(\lambda_0) = a$ alors λ_0 est l'abscisse du point de (Γ) d'ordonnée a .

► $\ln\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = -\ln(\lambda_0) = -a$ alors $\frac{1}{\lambda_0}$ est l'abscisse du point de (Γ) d'ordonnée $-a$.

$$5) a) \diamond g \text{ est continue, strictement décroissante sur }]0, 1] \text{ alors } g \text{ réalise une bijection de }]0, 1] \text{ sur } g(]0, 1]) = [0, +\infty[$$

$$5) b) \diamond \begin{cases} u_n = g^{-1}(n \ln(n)) ; n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(n) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$5) c) \diamond \forall n \geq 1, g\left(\frac{1}{n}\right) = (1-n) \ln\left(\frac{1}{n}\right) = (n-1) \ln(n)$$

$$\text{et } g\left(\frac{1}{n+1}\right) = (1-n-1) \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = n \ln(n+1)$$

$$\text{Montrons alors que } \forall n \geq 1, \boxed{(n-1) \ln(n) \leq n \ln(n) \leq n \ln(n+1)}$$

► Pour tout entier $n \geq 1$, $n-1 \leq n$ et comme $\ln(n) \geq 0$ alors $\boxed{(n-1) \ln(n) \leq n \ln(n)}$

► Pour tout entier $n \geq 1$, $n \leq n+1$ et comme la fonction $\ln$ est croissante sur $]0, +\infty[$ alors $\ln(n-1) \leq \ln(n)$ d'où $\boxed{n \ln(n-1) \leq n \ln(n)}$

$$\text{Ainsi } \forall n \geq 1, g\left(\frac{1}{n}\right) \leq n \ln(n) \leq g\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$5) d) \diamond \forall n \geq 1, g\left(\frac{1}{n}\right) \leq n \ln(n) \leq g\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Comme } g^{-1} \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[\text{ alors } \forall n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq g^{-1}(n \ln(n)) \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \text{ donc } \forall n \geq 1, \frac{n}{n+1} \leq n u_n \leq 1$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$$



Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

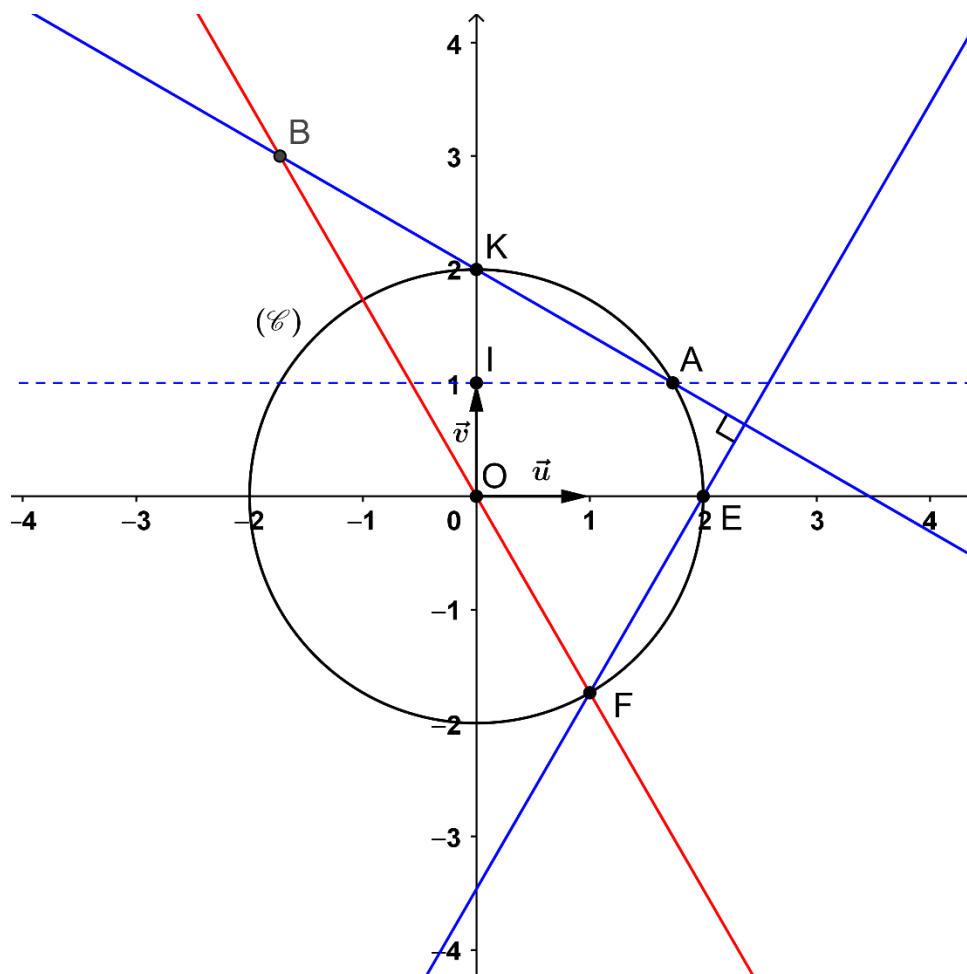


Figure 2

