



EXERCICE N° 1: 5 POINTS

B

A

C

C

A

L

A

U

R

É

A

T

2024

Exercice 1 (5 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+i)(\sqrt{3}-i)z + 2\sqrt{3} = 0$. **Bac tunisien 2024**
Session de contrôle
Section : Sciences expérimentales

a) Vérifier que $(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2 = -4\sqrt{3} + 4i$.

b) Résoudre l'équation (E).

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les

points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1-i$, $z_B = i\sqrt{3}z_A$ et $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de z_A .

b) Montrer que $z_A + z_B = z_C$.

Dans la figure ci-contre, on a placé les points A, B et C.

3. Montrer que OACB est un rectangle.

4. Soient I le centre de OACB et G le centre de gravité du triangle OAI.

On désigne par z_I et z_G les affixes respectives des points I et G.

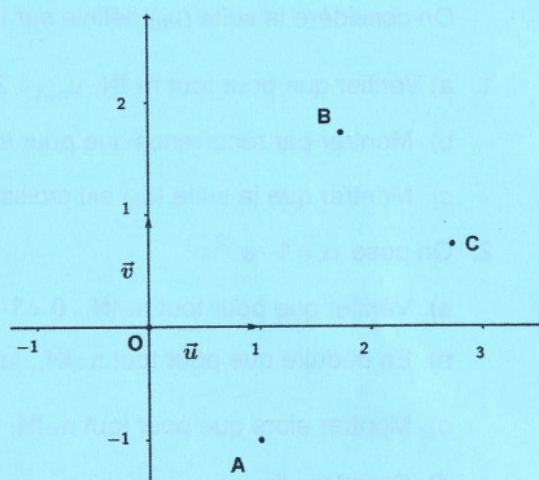
a) Donner l'écriture exponentielle de z_I .

b) Montrer que le triangle OAI est équilatéral.

c) Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$, en déduire que $z_G = \frac{\sqrt{2}}{3}(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})$.

d) Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{3}$.

e) Donner l'écriture exponentielle de z_G .



Barème

0.5

1

0.5

0.75

0.25

0.5

0.25

0.25

0.5

0.5

0.25

Correction de l'exercice 1:

1~ a~) $(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2 = \left(1+2i+\underbrace{i^2}_{=-1}\right)\left(\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\times i+i^2\right) = 2i\underbrace{(3+2\sqrt{3}i-1)}_{=2+2\sqrt{3}i} = -4\sqrt{3} + 4i$ **Ainsi :** $(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2 = -4\sqrt{3} + 4i$

b~) $z^2 - (1+i)(\sqrt{3}-i)z + 2\sqrt{3} = 0$; $a=1$; $b=-(1+i)(\sqrt{3}-i)$; $c=2\sqrt{3}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \underbrace{(1+i)^2}_{=2i}\underbrace{(\sqrt{3}-i)^2}_{=-2-2\sqrt{3}i} - 4 \times 1 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i - 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3} + 4i = (1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2$

$\Delta = -4\sqrt{3} + 4i = (1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2$; donc une racine carrée de Δ est $\delta = (1+i)(\sqrt{3}+i)$:

$z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i) + (1+i)(\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{(1+i)2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$

$z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i) - (1+i)(\sqrt{3}+i)}{2} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i)}{2} = \frac{-(1+i)2i}{2} = 1-i$

Ainsi : $S_C = \{1-i, \sqrt{3} + \sqrt{3}i\}$



$$z_A = 1 - i, \quad z_B = i\sqrt{3}z_A \text{ et } z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$



a) $z_A = 1 - i = re^{i\theta} : \begin{cases} |z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = r \\ \text{Arg}(z_A) \equiv \theta[2\pi] : \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Ainsi : $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $z_A + z_B = z_A + i\sqrt{3}z_A = (1 + i\sqrt{3})z_A = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = z_C$

Ainsi : $z_A + z_B = z_C$

3) $\begin{cases} z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow z_{\overline{OA}} + z_{\overline{OB}} = z_{\overline{OC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \text{OACB est un parallélogramme} \\ \frac{z_{\overline{OB}}}{z_{\overline{OA}}} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{i\sqrt{3}z_A}{z_A} = i\sqrt{3} : \text{imaginaire pur} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \end{cases}$

Ainsi : OACB est un rectangle

4) I le centre de OACB et G le centre de gravité du triangle OAI

a) I le centre de OACB $\Rightarrow$ I milieu de [OC] $\Rightarrow z_I = \frac{z_O + z_C}{2} = \frac{z_C}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Ainsi : $z_I = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

b) $\begin{cases} |z_A| = OA = \sqrt{2} \\ |z_I| = OI = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow OA = OI \Rightarrow OA = OI = AI$

Ainsi : Le triangle OAI est équilatéral

OACB est un rectangle de centre I $\Rightarrow OI = AI$

c) G le centre de gravité du triangle OAI $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \text{Aff}(\overrightarrow{OG}) = \frac{1}{3}\text{Aff}(\overrightarrow{OI}) + \frac{1}{3}\text{Aff}(\overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$

Ainsi : $z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$

$z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

Ainsi : $z_G = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$

d) $e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{2i\frac{\pi}{12}} + e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Ainsi : $e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{3}$

e) $z_G = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Ainsi : $z_G = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$= \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ (d'après 4/d)

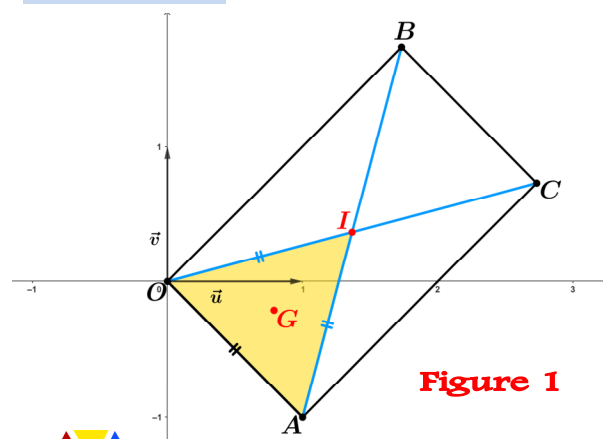


Figure 1

EXERCICE N° 2: 4 POINTS

Bac tunisien 2024
Session de contrôle
Section : Sciences expérimentales

B
A
C
C
A
L
A
U
R
É
A
T
2024

Exercice 2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, -3, -2)$, $C(3, 3, 0)$ et $I(3, 0, 3)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
b) Justifier qu'une équation cartésienne de P est $2x - y + 2z - 3 = 0$.
c) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P.

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6z - 7 = 0$.
a) Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon 5.
b) Montrer que P coupe (S) suivant le cercle (ζ) de centre A et de rayon $r = 4$.

3. Soit H le point tel que I est le milieu du segment $[AH]$.
a) Montrer que les coordonnées de H sont $(5, -1, 5)$.
b) Justifier que H appartient à la sphère (S') de centre I et de rayon 3.
c) Soit Q le plan tangent à (S') au point H.
Montrer que les plans P et Q sont parallèles.
d) Montrer que le plan Q coupe (S) suivant un cercle (ζ') dont on déterminera le rayon.

0.5
0.5
0.25
0.5
0.75
0.25
0.25
0.5
0.5

Correction de l'exercice 2:

$A(1;1;1) ; B(2;-3;-2) ; C(3;3;0) ; I(3;0;3)$

1-a- $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \vec{i} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \vec{k} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow$ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés
Ainsi : Les points A , B et C déterminent un plan P

b-L'équation cartésienne du plan P est $ax + by + cz + d = 0$; $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normale au plan P

$\left(\frac{1}{5} (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \right)$ est un vecteur normale au plan P $\Rightarrow (a = 2, b = -1 \text{ et } c = 2) \Rightarrow P : 2x - y + 2z + d = 0$
Or $A(1,1,1) \in P \Rightarrow 2 - 1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -3 \Rightarrow P : 2x - y + 2z - 3 = 0$ **Ainsi :** $P : 2x - y + 2z - 3 = 0$

c- $I(3,0,3) ; P : 2x - y + 2z - 3 = 0$. $(2 \times 3) - 0 + (2 \times 3) - 3 = 9 \neq 0 \Rightarrow I \notin P$ **Ainsi :** $I \notin P$

1-a- $M(x;y;z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6z - 7 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x}_{(x-3)^2 - 9} + \underbrace{y^2}_{(y-0)^2} + \underbrace{z^2 - 6z}_{(z-3)^2 - 9} - 7 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2 = 25 = 5^2$ **Ainsi :** (S) est la sphère de centre I et de rayon R=5

b- $d(I;P) = \frac{|2 \times 3 - 0 + 2 \times 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = 3 < 5$. $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

Ainsi : le plan P coupe la sphère (S) suivant le cercle (ζ) de centre A et de rayon $r=4$

$A \in P, \vec{IA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = n_P \Rightarrow A$ est le projeté orthogonal de I sur P

Corrigé de l'épreuve de maths / Sciences exp

3/7

EducMath

Session de contrôle / BAC 2024

3~

a~

b~

c~

d~

$$\begin{cases} \bullet \frac{x_A + x_H}{2} = x_I \Leftrightarrow x_H = 2x_I - x_A = 6 - 1 = 5 \Leftrightarrow \boxed{x_H = 5} \\ \bullet \frac{y_A + y_H}{2} = y_I \Leftrightarrow y_H = 2y_I - y_A = 0 - 1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{y_H = -1} \\ \bullet \frac{z_A + z_H}{2} = z_I \Leftrightarrow z_H = 2z_I - z_A = 6 - 1 = 5 \Leftrightarrow \boxed{z_H = 5} \end{cases}$$

Ainsi :

$$H(5, -1, 5)$$

Ainsi : H appartient à la sphère (S') de centre I et de rayon 3

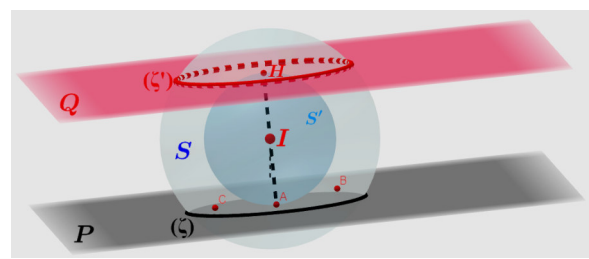
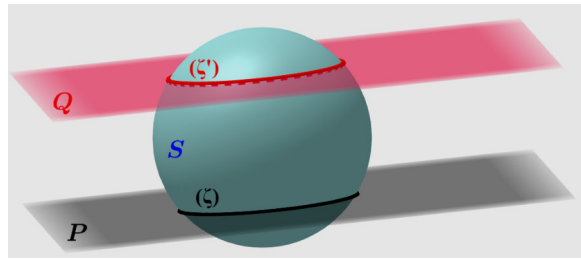
• Q le plan tangent à (S') au point H $\Rightarrow (IH) \perp Q$. Or $(IA) \perp P$ et $H \in (IA)$, donc $(IH) \perp P$

• $((IH) \perp Q \text{ et } (IH) \perp P) \Rightarrow P \parallel Q$

Ainsi : Les deux plans P et Q sont parallèles

• Q le plan tangent à (S') au point H $\Rightarrow d(I, Q) = IH = 3 < 5$

Ainsi : le plan Q coupe la sphère (S) suivant un cercle (ζ') de rayon $r' = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$



EXERCICE N° 3: 4.5 POINTS

Barème

B
A
C
C
A
L
A
U
R
É
A
T
2024

Exercice 3 (4.5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (2 - u_n)e^{-u_n} + u_n \end{cases}$

- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = (1 - e^{-u_n})(u_n - 2)$.
 - Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.
 - Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- On pose $\alpha = 1 - e^{-2}$.
 - Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha$.
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| < \alpha |u_n - 2|$.
 - Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \alpha^n$.
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
 - Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2 - \alpha^k \leq u_k \leq 2 + \alpha^k$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(n+1) - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \leq S_n \leq 2(n+1) + \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$.
 - Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Bac tunisien 2024
Session de contrôle
Section : Sciences expérimentales

0.25
0.75
0.5
0.25
0.5
0.75
0.25
0.25
0.5
0.5

Correction de l'exercice 3:



On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (2 - u_n)e^{-u_n} + u_n \end{cases}$$

$$1-a) u_{n+1} - 2 = (2 - u_n)e^{-u_n} + u_n - 2 = (u_n - 2) - (u_n - 2)e^{-u_n} = (u_n - 2)(1 - e^{-u_n}) \quad \text{Ainsi : } u_{n+1} - 2 = (u_n - 2)(1 - e^{-u_n})$$

1-b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_n < 2$. Soit la propriété : $P_n : "0 < u_n < 2"$

• **Initialisation** : $0 < u_0 = 1 < 2 \Rightarrow P_0$ est vrai

$$\bullet \text{ Hérédité : Supposons que } 0 < u_n < 2 \begin{cases} u_{n+1} = \underbrace{(2 - u_n)}_{>0} e^{-u_n} + u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} - 2 = \left(\underbrace{1 - e^{-u_n}}_{>0} \right) \underbrace{(u_n - 2)}_{<0} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 2 \Rightarrow P_{n+1} \text{ est vrai}$$

• **Conclusion** : D'après le principe de raisonnement par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$

1-c) $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \underbrace{(2 - u_n)}_{>0} e^{-u_n} > 0 \Rightarrow (u_n)$ est croissante **Ainsi :** (u_n) est croissante

$\Rightarrow$ La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 $\Rightarrow (u_n)$ est convergente **Ainsi :** (u_n) est convergente

2-• On pose $\alpha = 1 - e^{-2}$

2-a)• Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2 \Rightarrow -2 < -u_n < 0 \Rightarrow e^{-2} < e^{-u_n} < e^0 = 1 \Rightarrow -1 < -e^{-u_n} < -e^{-2}$

$\Rightarrow 0 < 1 - e^{-u_n} < 1 - e^{-2} = \alpha$ **Ainsi :** Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha$

2-b)• Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 2 = (u_n - 2) \underbrace{(1 - e^{-u_n})}_{>0} \Rightarrow |u_{n+1} - 2| = |(u_n - 2)|(1 - e^{-u_n})$ **Ainsi :**

$$\bullet 0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha \Rightarrow 0 < |(u_n - 2)|(1 - e^{-u_n}) < \alpha |(u_n - 2)| \Rightarrow |u_{n+1} - 2| < \alpha |(u_n - 2)| \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - 2| < \alpha |(u_n - 2)|$$

2-c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - 2| < \alpha^n$. Soit la propriété : $P_n : "|u_n - 2| \leq \alpha^n"$

• **Initialisation** : $|u_0 - 2| = 1 \leq \alpha^0 = 1 \Rightarrow P_0$ est vrai

• **Hérédité** : Supposons que $|u_n - 2| \leq \alpha^n \Rightarrow |u_{n+1} - 2| \leq \alpha |u_n - 2| < \alpha \cdot \alpha^n = \alpha^{n+1} \Rightarrow P_{n+1}$ est vrai

• **Conclusion** : D'après le principe de raisonnement par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - 2| \leq \alpha^n$

$$2-d) \begin{cases} |u_n - 2| \leq \alpha^n \\ 0 < \alpha = 1 - e^{-2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \quad \text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $n \in \mathbb{N}$, $\bullet S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$ **Ainsi :**

3-a) Pour tout $k \in \mathbb{N} : |u_k - 2| \leq \alpha^k \Leftrightarrow -\alpha^k \leq u_k - 2 \leq \alpha^k \Leftrightarrow 2 - \alpha^k \leq u_k \leq 2 + \alpha^k$ **Pour tout $k \in \mathbb{N} :$**

3-b) Pour tout $k \in \mathbb{N} : 2 - \alpha^k \leq u_k \leq 2 + \alpha^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n (2 - \alpha^k) \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n (2 + \alpha^k)$

• $\sum_{k=0}^n \alpha^k$: Somme des $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\alpha \Rightarrow \sum_{k=0}^n \alpha^k = 1 \cdot \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$

• $\sum_{k=0}^n 2 = \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{(n+1) \times 2} \Rightarrow \sum_{k=0}^n 2 = 2(n+1)$ **Ainsi :** Pour tout $n \in \mathbb{N} : 2(n+1) - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \leq S_n \leq 2(n+1) + \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$

3-c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \frac{2(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{2(n+1)}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{n} \right)^{\nearrow 0} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\nearrow 0} \cdot \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} \leq 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 2 \quad \text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 2$$



B
A
C
C
A
L
A
U
R
É
A
T
2024

Exercice 4 (6.5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x$ et on désigne par (ζ_f) sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bac tunisien 2024
Session de contrôle
Section : Sciences expérimentales

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.
2. a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$.
3. Montrer que la tangente Δ à la courbe (ζ_f) au point $A(1, 1)$ est d'équation $y = x$.
4. On considère la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \ln(x - 1)$.
- a) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) > h(x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (ζ_h) de la fonction h , la droite $\Delta : y = x$ et on a placé le réel α .

5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (ζ_f) .
6. Pour tout réel $\lambda > 2$, on désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ_f) et (ζ_h) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = \lambda$.

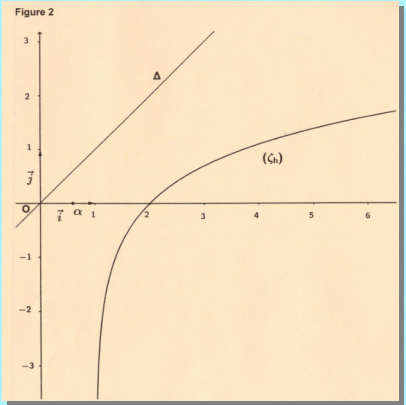
a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) + \ln(\lambda-1) - 2 \ln 2.$$

b) En remarquant que $\frac{2x-1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, montrer que

$$A(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2 \ln \lambda + \ln(\lambda-1) - \lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) - 4 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

c) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = -1$ et calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.



Correction de l'exercice 4:

1-a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x$: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2x-1) \rightarrow -1}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow 0}} = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

Ainsi : La droite $x=0$ est une asymptote à la courbe (ζ_f)

b-) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow 0} + (\ln x)^{\nearrow +\infty} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^3} + \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{\nearrow 0} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\nearrow 0} = 0 \end{array} \right.$

Ainsi : La courbe (ζ_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$

$$2-a) f(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{-2x+2}{x^3} + \frac{1 \cdot x^2}{x \cdot x^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

Ainsi : Pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$

Tableau de variations de f

x	0	+	+
f'(x)		+	
f			+

2-b) • Pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} > 0 \Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x^2 - 2x + 2)$

• $x^2 - 2x + 2 = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 > 0$ (Signe de $a = 1 > 0$) $\Rightarrow f'(x) > 0$

2-c) • f est strictement croissante sur $]0, +\infty[\Rightarrow f$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

• $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$

$\begin{cases} f(0.5) \approx -0.69 \\ f(0.6) \approx 0.04 \end{cases} \Rightarrow f(0.5) \times f(0.6) < 0 \Rightarrow$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0.5 < \alpha < 0.6$

Ainsi : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $0.5 < \alpha < 0.6$

3) • $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} \Rightarrow f'(1) = \frac{1 - 2 + 2}{1} = 1$. La tangente à la courbe (ζ_f) au point A(1,1) a pour équation:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + 1 = x$ **Ainsi :** La droite $\Delta: y=x$ est la tangente à la courbe (ζ_f) au point A(1,1)

4-a) • $x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x$. $\frac{2x-1}{x^2} > 0 \Rightarrow f(x) > \ln x > \underbrace{\ln(x-1)}_{=h(x)}$ **Ainsi :** $f(x) > h(x)$

4-b) $f(x) - h(x) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln x - \ln(x-1) = \frac{2x-1}{x^2} + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$



$\begin{cases} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - h(x) = 0$ **Ainsi :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - h(x)) = 0$

5) - Voir figure 2 si dessous

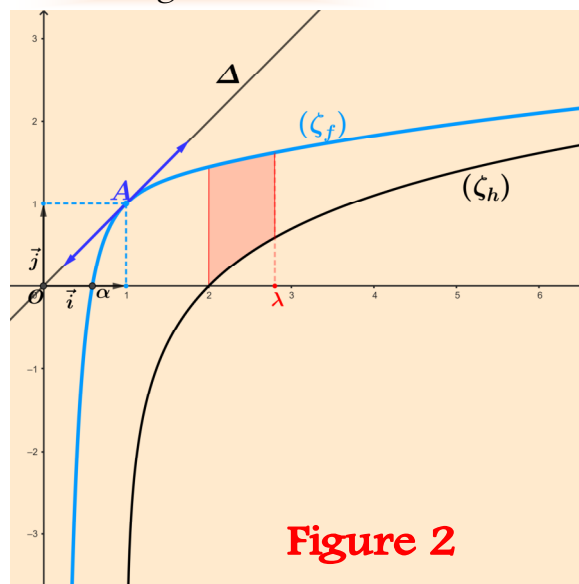


Figure 2

6-a) $\begin{cases} \bullet I = \int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \int_2^\lambda 1 \cdot \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx \\ \bullet u(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{x(x-1)} \\ \bullet v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \\ \bullet u' \text{ et } v' \text{ sont continues sur } [2; \lambda] \end{cases}$

$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right]_2^\lambda + \int_2^\lambda \frac{-1}{x(x-1)} dx = \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) - 2 \ln 2 + \left[\ln(x-1) \right]_2^\lambda$

$= \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) - 2 \ln 2 + \ln(\lambda-1)$ **Ainsi :** $\int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) - 2 \ln 2 + \ln(\lambda-1)$

6-b) $A(\lambda) = \int_2^\lambda \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_2^\lambda \left(\frac{2x-1}{x^2} + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right) dx, (f(x) > g(x))$

$\Rightarrow A(\lambda) = \int_2^\lambda \frac{2x-1}{x^2} dx + \int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \int_2^\lambda \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} dx + \int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \left[2 \ln x + \frac{1}{x} \right]_2^\lambda + \int_2^\lambda \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx$

$= 2 \ln \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} + \lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) - 2 \ln 2 + \ln(\lambda-1)$

Ainsi : $A(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2 \ln \lambda + \ln(\lambda-1) - \lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) - 4 \ln 2 - \frac{1}{2}$

6-c) • $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} - \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\right)}{\left(1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\right) - 1} : \begin{cases} \bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\right) = 1 \\ \bullet \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} - \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\right)}{\left(1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\right) - 1} = -1$ **Ainsi :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = -1$ **RAPPEL** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + (2 \ln \lambda) + (\ln(\lambda-1)) - \left(\lambda \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) \right) - 4 \ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{+\infty}$ **Ainsi :** $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$