

Exercice 1

3.5 points

1) Le nuage de points de la série (C, T) .2) a) Le coefficient de corrélation linéaire entre X et T : $r = -0.999$

2) b) Comme $|r| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors un ajustement affine est justifié d'où $T = aX + b = -291.4X + 1579.3$
 et comme $X = \ln(200 - C)$ alors $T = \underbrace{-291.4}_{\beta} \ln(200 - C) + \underbrace{1579.3}_{\alpha}$

3) a) Pour $C_1 = 190$ on a $T_1 = -291.4 \times \ln(200 - 190) + 1579.3 = -291.4 \times \ln(10) + 1579.3 = 908 \text{ mn}$

3) b) ♦ Pour $C_2 = 197$ on a $T_2 = -291.4 \times \ln(200 - 197) + 1579.3 = -291.4 \times \ln(3) + 1579.3 = 1259 \text{ mn}$
 Comme $190 \leq C \leq 197$ alors $908 \leq T \leq 1259$
 D'où la durée de l'efficacité optimale du médicament est $1259 - 908 = 351 \text{ mn}$

Exercice 2

5 points

1) a) $(E): z^2 - 2(\sqrt{3} + i)z + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$

► $(4i)^2 - 2(\sqrt{3} + i)4i + 8(1 + i\sqrt{3}) = -16 - 8\sqrt{3}i + 8 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$
 alors $4i$ est une solution de (E) .

1) b) On a $4i \times z_2 = 8(1 + i\sqrt{3})$ alors $z_2 = \frac{8(1 + i\sqrt{3})}{4i} = -2i(1 + i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2i$ 2) a) ♦ $z_D = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2) b) Construire le point D : $\begin{cases} D \in (\mathcal{C}) \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$

3) a) $z_I = (\sqrt{3} - 3) + i(\sqrt{3} + 1)$.

► $z_D - z_I = 2\sqrt{3} - 2i - (\sqrt{3} - 3) - i(\sqrt{3} + 1) = (3 + \sqrt{3}) - i(3 + \sqrt{3}) = (3 + \sqrt{3})(1 - i)$

3) b) $z_A = -4$, $z_B = 4$, $z_C = 4i$ et $z_D = 2\sqrt{3} - 2i$

$$\diamond \frac{z_{\overrightarrow{ID}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{z_D - z_I}{z_C - z_A} = \frac{(3 + \sqrt{3})(1 - i)}{4(1 + i)} = \frac{(3 + \sqrt{3})(-2i)}{8} = -\frac{(3 + \sqrt{3})}{4}i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\diamond \frac{z_{\overrightarrow{IA}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-4 - (\sqrt{3} - 3) - i(\sqrt{3} + 1)}{4(1 + i)} = \frac{-(\sqrt{3} + 1) - i(\sqrt{3} + 1)}{4(1 + i)} = \frac{-(\sqrt{3} + 1)(1 + i)}{4(1 + i)} = \frac{-(\sqrt{3} + 1)}{4} \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires d'où A, I et C

► alors I est le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) .



3) c) Construction du point $I : \begin{cases} I \in (AC) \\ I \in \Delta : (\Delta \perp (AC) \text{ passant par } D) \end{cases}$

4) a) $C \in (\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ alors le triangle ABC est rectangle en C .

4) b) ♦ Le triangle ABC est rectangle en C alors $\hat{ACB} = \hat{ICB} = \frac{\pi}{2}$

♦ I est le projeté orthogonal de D sur la droite (AC) alors $\hat{DIC} = \frac{\pi}{2}$

♦ J est le projeté orthogonal de D sur la droite (BC) . (AC) alors $\hat{DJC} = \frac{\pi}{2}$

► alors le quadrilatère $CIDJ$ est un rectangle.

4) c) On a $CIDJ$ est un rectangle alors $z_{\overline{ID}} = z_{\overline{CJ}}$

$$\text{donc } z_J = z_D - z_I + z_C = 2\sqrt{3} - 2i - (\sqrt{3} - 3) - i(\sqrt{3} + 1) + 4i = (\sqrt{3} + 3) + i(1 - \sqrt{3})$$

Exercice 3

4.5 points

1) a) ♦ $t \geq 0 \Leftrightarrow 1+t \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1$

1) b) On a $\forall t \geq 0, \frac{1}{1+t} \leq 1$ et comme $\begin{cases} t \mapsto \frac{1}{1+t} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$ sont continues sur $[0, x]$; $x \geq 0$

alors $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$ donc $\ln(1+x) - \ln(1) \leq x - 0$ d'où pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

2) ♦ $\forall t \geq 0, \ln(1+e^{2t}) = \ln(e^{2t}(1+e^{-2t})) = \ln(e^{2t}) + \ln(1+e^{-2t}) = 2t + \ln(1+e^{-2t})$.

3) ♦ $A = \int_2^3 t e^t dt$. $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$

$$\text{alors } A = \left[t e^t \right]_2^3 - \int_2^3 e^t dt = 3e^3 - 2e^2 - (e^3 - e^2) = 2e^3 - e^2$$

4) a) ♦ $A = \int_2^3 t e^t dt$ et $B = \int_2^3 e^t \ln(1+e^{2t}) dt$

► On a $B = \int_2^3 e^t \ln(1+e^{2t}) dt = \int_2^3 e^t (2t + \ln(1+e^{-2t})) dt = \int_2^3 (2te^t + e^t \ln(1+e^{-2t})) dt$.

$$\text{alors } B - 2A = \int_2^3 (2te^t + e^t \ln(1+e^{-2t})) dt - 2 \int_2^3 t e^t dt = \int_2^3 e^t \ln(1+e^{-2t}) dt$$

Comme $\forall t \in [2, 3] : \begin{cases} e^t > 0 \\ 1+e^{-2t} > 1 \Rightarrow \ln(1+e^{-2t}) > 0 \end{cases}$ alors $B - 2A \geq 0$

4) b) $B - 2A = \int_2^3 e^t \ln(1+e^{-2t}) dt$

► On a $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$ alors pour $x = e^{-2t}$, $\ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$ ainsi $e^t \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-t}$

d'où $\int_2^3 e^t \ln(1+e^{-2t}) dt \leq \int_2^3 e^{-t} dt$ donc $B - 2A \leq [-e^{-t}]_2^3$ alors $B - 2A \leq e^{-2} - e^{-3}$



- 4) c) On a $0 \leq B - 2A \leq e^{-2} - e^{-3}$ alors $2A \leq B \leq e^{-2} - e^{-3} + 2A$
 et comme $A = 2e^3 - e^2$ alors $\underbrace{4e^3 - 2e^2}_{\approx 65.564} \leq B \leq \underbrace{e^{-2} - e^{-3} + 4e^3 - 2e^2}_{\approx 65.649}$
 Ainsi $65.56 < B < 65.65$.

Exercice 4

7 points

D) 1) a) $f(x) = x - \ln(x+2)$; $x \in]-2, +\infty[$

► $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(x - \underbrace{\ln(x+2)}_{\searrow -\infty} \right) = +\infty.$

► La droite $x = -2$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ à droite en (-2) .

1) b) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{(x+2)}_{\nearrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\searrow 1} - \underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+2}}_{\searrow 0} \right) \right] = +\infty$

♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \ln(x+2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x+2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+2}}_{\searrow 0} \times \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\searrow 0} \right) = 1$

1) c) ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x+2)) = -\infty$

► alors la droite $\Delta : y = x$ est une direction asymptotique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) ♦ f est dérivable sur $] -2, +\infty[$ et $\forall x > -2, f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}.$

2) b)

♦ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

x	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

2) c) ♦ f est continue, strictement décroissante sur $] -2, -1]$

$f(]-2, -1]) = [-1, +\infty[$ et $0 \in] -\infty, -1]$

► alors l'équation $f(x) = 0$ admet sur $] -2, -1]$ une unique solution $\alpha < -1$.

♦ f est continue, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$

$f([-1, +\infty[) = [-1, +\infty[$ et $0 \in [-1, +\infty[$

► alors l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[-1, +\infty[$ une unique solution β .

Comme $\begin{cases} f(1.1) \approx -0.031 < 0 \\ f(1.2) \approx 0.036 > 0 \end{cases}$ alors $1.1 < \beta < 1.2$

• Conclusion : $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -2, +\infty[$ exactement deux solutions α et β telles que $\alpha < -1$ et $1.1 < \beta < 1.2$.

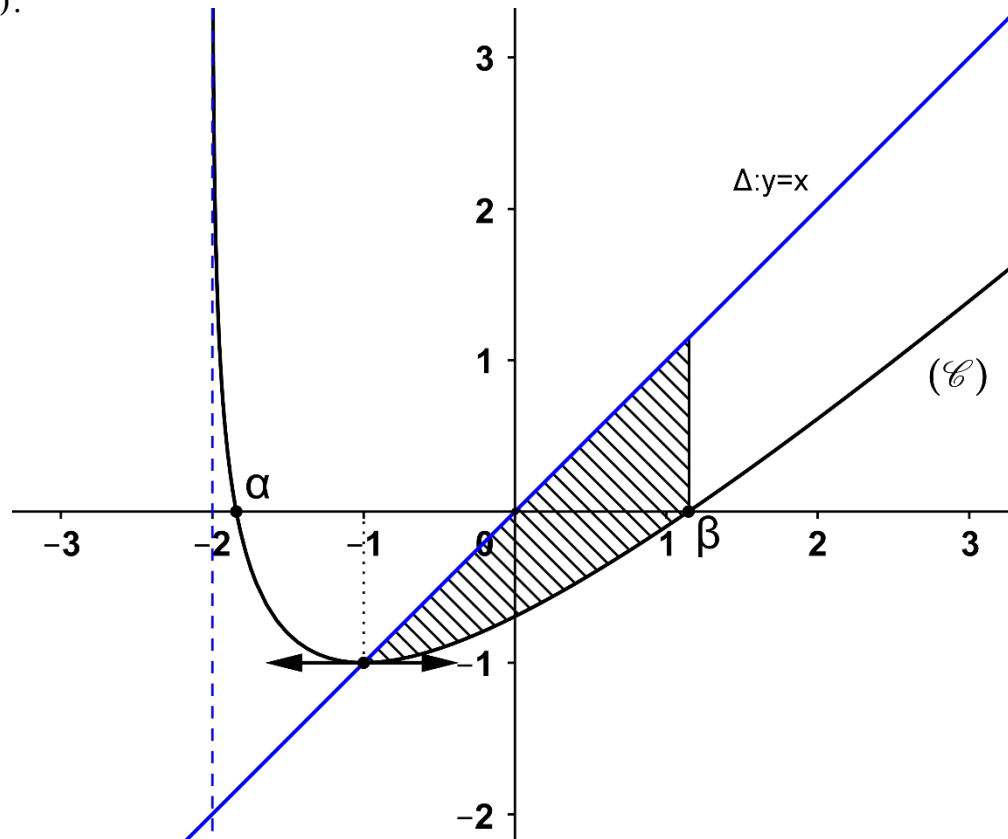


3) a) ♦ $f(x) - x = -\ln(x+2)$

► $f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
$\left(\begin{smallmatrix} \text{Position} \\ (\mathcal{C}_f) \text{ et } \Delta \end{smallmatrix} \right)$	$\frac{(\mathcal{C}_f)}{\Delta}$	$\begin{array}{c} \\ (-1, -1) \end{array}$	$\frac{\Delta}{(\mathcal{C}_f)}$

3) b) La courbe $(\mathcal{C}_f)$.



4) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{\beta} (x - f(x)) dx = \int_{-1}^{\beta} \ln(x+2) dx$: $\begin{cases} u(x) = \ln(x+2) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{x+2} \\ v(t) = x \end{cases}$ alors

► $\mathcal{A} = [x \ln(x+2)]_{-1}^{\beta} - \int_{-1}^{\beta} \frac{x}{x+2} dx = \beta \ln(\beta+2) - \int_{-1}^{\beta} (1 - \frac{2}{x+2}) dx = \beta \ln(\beta+2) - [x - 2 \ln(x+2)]_{-1}^{\beta}$

$\mathcal{A} = \beta \ln(\beta+2) - (\beta - 2 \ln(\beta+2) - (-1)) = \beta \ln(\beta+2) - \beta + 2 \ln(\beta+2) - 1 = \ln(\beta+2)(\beta+2) - \beta - 1$

• Or $f(\beta) = 0$ alors $\beta - \ln(\beta+2) = 0 \Leftrightarrow \ln(\beta+2) = \beta$

ainsi $\mathcal{A} = \underbrace{\ln(\beta+2)(\beta+2)}_{=\beta} - \beta - 1 = \beta(\beta+2) - \beta - 1 = \beta^2 + \beta - 1$

II) 1) a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 0 \geq -1$. (la proposition est vraie pour $n = 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $u_n \geq -1$ et montrons que $u_{n+1} \geq -1$

❖ On a $u_n \geq -1$ et comme f est croissante sur $[-1, +\infty[$ alors $f(u_n) \geq f(-1)$

d'où $U_{n+1} \geq -1$

• Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$.



1) b) ♦ $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\ln(u_n + 2)$

Comme $u_n \geq -1$ alors $u_n + 2 \geq 1$ d'où $\ln(u_n + 2) \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$

d'où la suite (u_n) est décroissante.

1) c) ♦ La suite (u_n) est décroissante, minorée par -1 donc (u_n) est convergente.

♦ On a ★ $u_{n+1} = f(u_n)$;

★ (u_n) converge vers ℓ avec $-1 \leq \ell$

★ f est continue sur $[-1, +\infty[$ donc continue en ℓ .

alors $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \ell + \ln(\ell + 2) \Leftrightarrow \ln(\ell + 2) = 0 \Leftrightarrow \ell = -1$.

2) a) ♦ $\forall k \in \mathbb{N}, u_k - u_{k+1} = u_k - f(u_k) = u_k - u_k + \ln(u_k + 2) = \ln(u_k + 2)$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \ln(2 + u_k) = u_k - u_{k+1}$.

2) b) On a $v_n = (2 + u_0) \times (2 + u_1) \times \cdots \times (2 + u_n)$ et $\ln(2 + u_k) = u_k - u_{k+1}$

♦ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(v_n) = -u_{n+1}$

• Pour $n = 0$, $\ln(v_0) = \ln(2 + u_0) = \ln(2) = -u_1$. (la proposition est vraie pour $n = 0$).

• Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $\ln(v_n) = -u_{n+1}$ et montrons que $\ln(v_{n+1}) = -u_{n+2}$

$$\diamond \text{ On a } \ln(v_{n+1}) = \ln(v_n (2 + u_{n+1})) = \underbrace{\ln(v_n)}_{-u_{n+1}} + \underbrace{\ln(2 + u_{n+1})}_{u_{n+1} - u_{n+2}} = -u_{n+2}$$

• Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(v_n) = -u_{n+1}$

2) c) ♦ $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(v_n) = -u_{n+1}$ alors $v_n = e^{-u_{n+1}}$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_n} = e^{-(-1)} = e^1 = e.$$



Figure 1

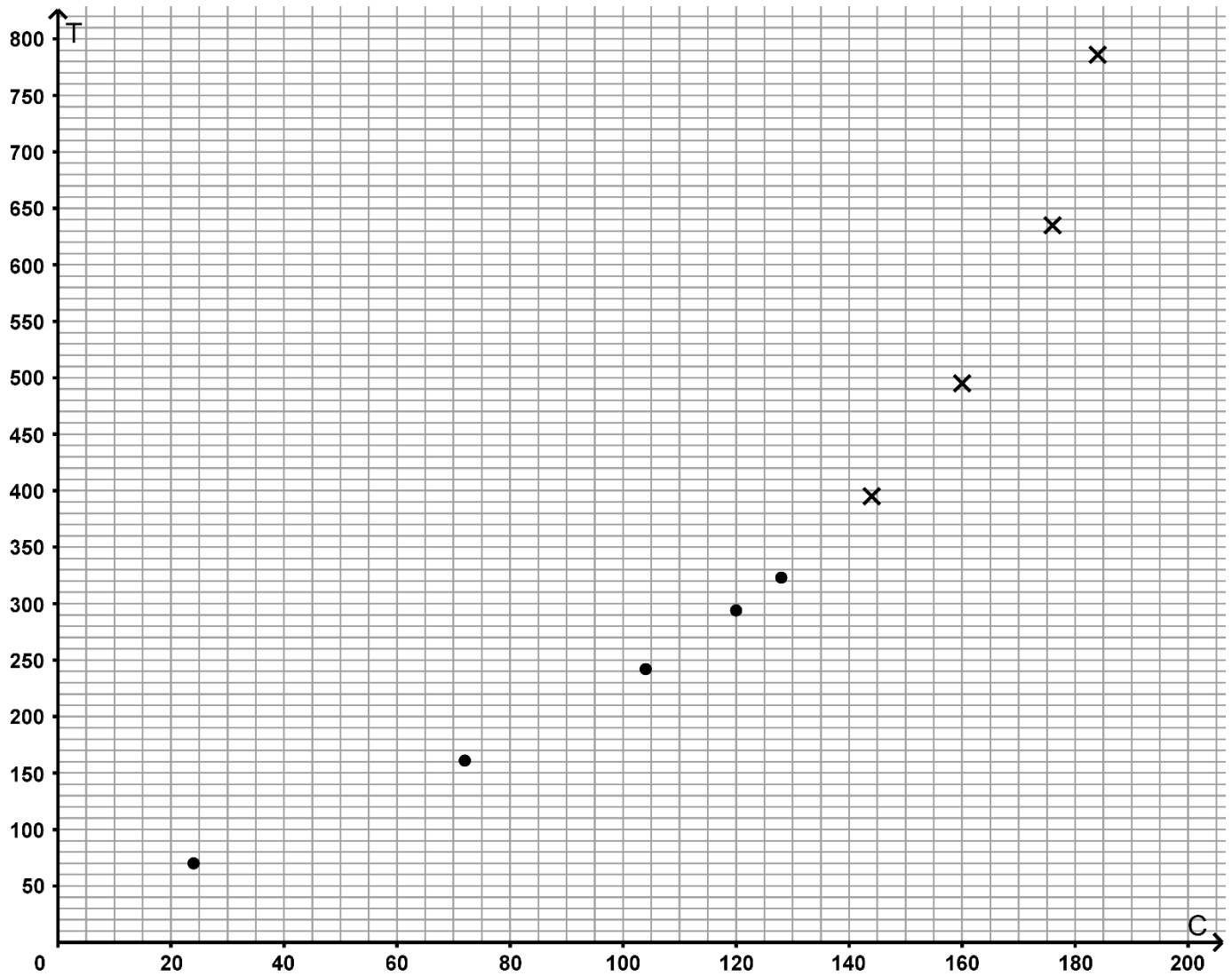


Figure 2

