

MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Expérimentales
Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

1) Soient les évènements :

D : « La personne est diabétique » et H : « La personne est atteinte par une hépatite »

On sait que : $p(D) = 0,15$; $p(H) = 0,05$ et que $p(D \cap H) = 0,03$.

$$p(D \cup H) = p(D) + p(H) - p(D \cap H) = 0,17.$$

La réponse **b)** est correcte.

$$2) p(H/D) = \frac{p(D \cap H)}{p(D)} = \frac{0,03}{0,15} = 0,2.$$

La réponse **c)** est correcte.

$$3) p(B, A, C) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

La réponse **a)** est correcte.

$$4) p(A \geq 1) = 1 - p(A = 0) = 1 - C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

La réponse **c)** est correcte.

Exercice 2 :

$$1) a) \sqrt{3}^2 - 2i\sqrt{3} + (-3 + 2i\sqrt{3}) = 3 - 2i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 0 \text{ donc } \sqrt{3} \text{ est solution de (E).}$$

$$b) \text{ La deuxième racine } z_2 \text{ doit satisfaire l'égalité } z_2 + \sqrt{3} = 2i \text{ donc } z_2 = -\sqrt{3} + 2i$$

$$2) a) AC = |z_C - z_A| = |-\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2i| = |-2\sqrt{3} - 2i| = 4.$$

$$BD = |z_D - z_B| = |\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4 \text{ donc } AC = BD = 4.$$

$$b) Z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} - 2i = -2\sqrt{3} = Z_{\overline{DC}}.$$

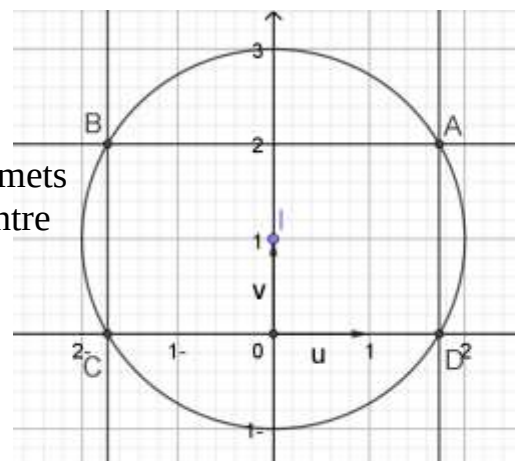
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car $\overline{AB} = \overline{DC}$ et ses diagonales sont isométriques donc c'est un rectangle.

$$3) a) \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2i}{2} = z_I \text{ donc I est le}$$

centre du rectangle ABCD et comme ses diagonales ont pour longueur 4 alors ses sommets A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Le point I et de rayon 2.

b)

$$c) \mathcal{A}_{ABCD} = AB \times AD = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \text{ u.a}$$



Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in]-1, +\infty[.$$

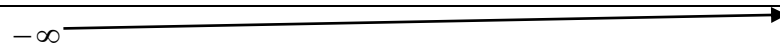
A) 1. a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (ζ)

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\rightarrow 1} = 0 \text{ donc la}$$

courbe (ζ) admet au voisinage de plus l'infini une branche parabolique de direction celle de la droite des abscisses.

$$2. a) f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

b) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $f'(x) > 0$.

x	-1	+	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

c) f est continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$.

B) 1. a) $g(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

g est strictement croissante sur $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ et $-1 < 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc

$$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > g(0) = 0.$$

b) Les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $]-1, +\infty[$.

La restriction de g à l'intervalle $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ est continue et strictement

croissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image et comme $g(0) = 0$ alors la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ est 0.

La restriction de g à l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$ est continue et strictement

décroissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image

$\left] -\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$ et comme $0 \in \left] -\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$ alors l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ admet dans $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$ une solution unique α .

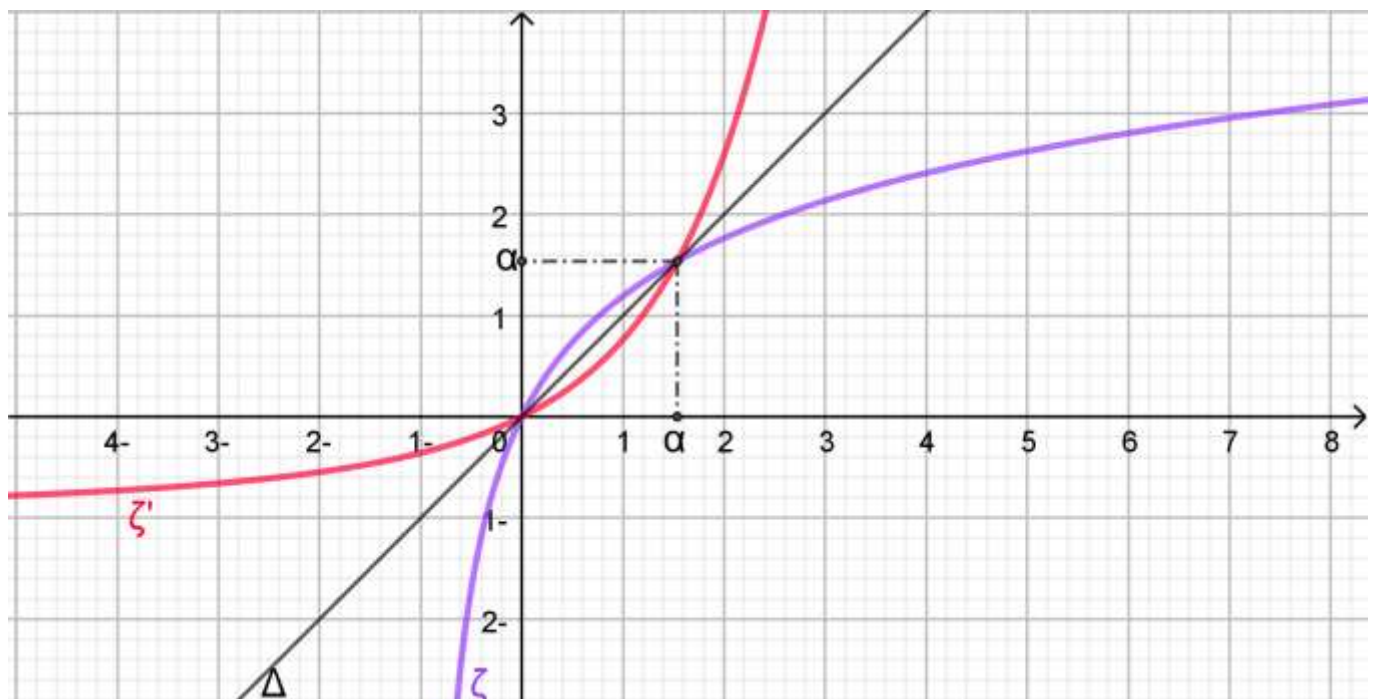
Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, +\infty[$ deux solutions 0 et α .

c) Comme $g(1,5) \approx 0,02 > 0$ et $g(1,6) \approx -0,03 < 0$ alors $1,5 < \alpha < 1,6$

d)

x	-1	0	α	$+\infty$
$f(x) - x$				
Position	ζ au-dessous de Δ	ζ au-dessus de Δ $\zeta \cap \Delta = \{(0,0)\}$	ζ au-dessus de Δ $\zeta \cap \Delta = \{(\alpha, \alpha)\}$	ζ au-dessous de Δ

2. a) et b)



3) Pour des raisons de symétrie,

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx = 2 \int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - x \right) dx = 2 \left[\frac{-x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right]_0^\alpha + 2J$$

$$\text{avec } J = \int_0^\alpha \ln(x+1) dx$$

$$\text{On pose } U(x) = \ln(x+1) \rightarrow U'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$V'(x) = 1 \rightarrow V(x) = x$$

$$J = \left[x \ln(x+1) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{x}{x+1} dx = \alpha \ln(\alpha+1) - \int_0^\alpha 1 - \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \alpha \ln(\alpha+1) - \left[x - \ln(x+1) \right]_0^\alpha = (1+\alpha) \ln(\alpha+1) - \alpha$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha) \ln(\alpha+1) - 2\alpha$$

$$= -\alpha^2 - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha) \ln(\alpha+1) = 2\alpha \ln(\alpha+1) - \alpha^2$$

Exercice 4 :

$$1) \quad g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \text{ et } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \quad . \quad x \in 1, +\infty .$$

$$G(x) = \sqrt{x^2-2x+2} \text{ et } H(x) = \ln \left[x-1 + \sqrt{x^2-2x+2} \right] \quad . \quad x \in 1, +\infty .$$

$$\text{On a : } G'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = g(x) \text{ donc } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } [1, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } H'(x) &= \frac{1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} \\ &= \frac{\frac{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = h(x) \end{aligned}$$

Par suite, H est une primitive de h sur $[1, +\infty[$.

$$2) \quad I = \int_1^2 h(x) dx = H(2) - H(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2}) .$$

$$3) \quad a) \quad J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx \text{ et } K = \int_1^2 G(x) dx$$

$$\begin{aligned} I + J &= \int_1^2 \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int_1^2 \sqrt{x^2-2x+2} dx = K \end{aligned}$$

$$\text{b) } J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = \int_1^2 (x-1) \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$$

$$\text{On pose : } U(x) = x - 1 \rightarrow U'(x) = 1$$

$$V'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \rightarrow V(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$J = \left[(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \right]_1^2 - \int_1^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \sqrt{2} - K$$

$$\text{c) } J = \sqrt{2} - K = \sqrt{2} - I - J \text{ donc } J = \frac{\sqrt{2} - I}{2} = \frac{\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$$