

Correction session de controle 4 sc 2020



Trabelsi Chokri

Exercice 1 : (3 points)

- 1) a) Déterminer l'arrondi à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
b) Donner une équation de la droite de régression de Y en X.

a) $r = 0,98$

b) $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}} = 0,73$
 $b = \bar{y} - a\bar{x} = 26,30$

d'où D: $y = 0,73x + 26,30$

- c) Estimer par ce modèle la quantité d'émission mondiale de (CO_2) en 2022.

en 2022 on a $x = 22$
la quantité d'émission mondiale de CO_2
 $y = 0,73 \times 22 + 26,30 = 41,3 \text{ G.T.}$

- 2) a) Justifier qu'on peut modéliser l'évolution mondiale de la quantité d'émission de (CO_2) par une relation de la forme $Y = aX^2 + bX + c$.

$z = (x - 22)^2$ $y = -0,03z + 37,47$

D'où $y = -0,03(x - 22)^2 + 37,47$
 $= -0,03x^2 + 1,32x + 22,95$

- b) Estimer, par ce nouveau modèle, les émissions mondiales de dioxyde de carbone en 2022.

en 2022 $x = 22$

d'où $y = 37,47 \text{ G.T.}$

- 3) a) Justifier qu'on peut prévoir une réduction des émissions mondiales de (CO_2) tous les ans à partir de l'an 2023.

Soit la fonction $f(x) = -0,03x^2 + 1,32x + 22,95$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 30]$
 $f'(x) = -0,06x + 1,32$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 22$

x	0	22	30
$f'(x)$		+	-
f		$f(22)$	

f est décroissante sur $[22, 30]$.
donc à partir de l'année 2022
 f est décroissante

b) Estimer le pourcentage de réduction des émissions mondiales de (CO_2) en 2030 par rapport à leur niveau en 2018.

en 2030. $x = 30$.
l'émission en CO_2 est de 3315 G.T
le pourcentage de réduction en 2030
par rapport à 2018 est

$$\frac{3711 - 3315}{3711} = 4,18\%$$

Exercice 2 : (5 points)

- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P d'équation $2x + 2y + z - 6 = 0$.
- Calculer l'aire du triangle ABC.

$$a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, les points A, B et C ne sont pas alignés, ainsi ils définissent un plan P ; on vérifie que A, B et C vérifient l'équation $2x + 2y + z - 6 = 0$

$$c) A(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{3}{2} \text{ u.a}$$

2) Soit (S) la sphère de centre $I(-1, -1, 1)$ et de rayon 3.

Montrer que la sphère (S) et le plan P sont tangents au point A.

$$d(I, P) = \frac{|-2 - 2 + 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 = R$$

Donc S et P sont tangents
en plus $IA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 = R \Leftrightarrow A \in S$
et $A \in P$

d'où S et P sont tangents en A.

3) Soit le point $D(1, 0, 4)$.

a) Vérifier que le point A est le milieu du segment [CD].

b) Montrer que le triangle BCD est rectangle en B.

$$\frac{x_C + x_D}{2} = 1 = x_A; \quad \frac{y_C + y_D}{2} = 1 = y_A; \quad \frac{z_C + z_D}{2} = 2 = z_A$$

d'où A est le milieu de [CD]

Rq Comme A et C sont deux points du plan P alors $D \in P$

$$b) \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{BD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BD} = 1 - 1 + 0 = 0$$

$BC \perp BD$ rectangle en B

Rq: (on peut calculer les distances CD et AB).

4) Soit (S') une sphère passant par les points B, C et D et soit J son centre.

a) Justifier que le point J appartient à la droite (AI).

On a $S' \cap P$ est le cercle circonscrit au triangle BCD de centre A ainsi
 $(AJ) \perp P$

ainsi on a $S \cap P = \{A\} \Rightarrow (AI) \perp P$

Par suite A, I et J sont alignés.



$$(AI) = \mathcal{D}(A, \vec{IA}) \quad \text{avec } \vec{IA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x, y, z) \in (AI) \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha \vec{IA} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

5) Déterminer toutes les sphères passant par les points B, C et D et de rayon $\sqrt{14}$.

S' sphere de centre J et de rayon $\sqrt{14}$

$$J \in (IA) \text{ et } JC = 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(1+2\alpha, 1+2\alpha, 2+\alpha) \\ (2\alpha)^2 + (2\alpha-1)^2 + (2+\alpha)^2 = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(1+2\alpha, 1+2\alpha, 2+\alpha) \\ \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$J_1(3, 3, 3) \text{ et } J_2(-1, -1, 1)$$

d'où on a 2 sphères de centre J_1 et J_2 et de rayon $\sqrt{14}$

Exercice 3 : (4.5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 4iz - 3 = 0$.

$$\Delta = -4 = (2i)^2$$

$$z' = i$$

$$z'' = 3i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{i, 3i\}$$

2) a) Placer dans le même repère le point C d'affixe $z_C = \sqrt{3} + 3i$.

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

a) les parallèles à $(O\vec{A})$ passant par D et à $(O\vec{B})$ passant par B se coupent au point C.

b) $z_{\vec{AD}} = \sqrt{3}$ et $z_{\vec{BC}} = \sqrt{3}$ et A, B et C sont alignés

d'où ABCD est un parallélogramme

$$\text{de plus } \frac{z_{\vec{AD}}}{z_{\vec{AB}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (AD)$$



Trabelsi Chokri

D'où $AB(O)$ est un rectangle.

3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C et de rayon $\sqrt{3}$.

Justifier que la droite (OA) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

$$d(C, (OA)) = d(C, (O\vec{v})) = |\operatorname{Re} z_C| = \sqrt{3} = R$$

Ainsi (OA) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

4) Soit M un point de la demi-droite $[OB)$ privé de O , d'affixe z_M .

a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

$$z_B = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\pi/6}$$

$$z_C = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$$

b) Justifier que $\arg(z_M) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv (\vec{u}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi) \quad \pi \in [0, \pi[$$

$$\text{donc } \arg z_n \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

c) Soit $r = OM$. Montrer que $z_M - z_C = (r - 3 - i\sqrt{3})e^{i\pi/6}$.

$$z_n = re^{i\pi/6}$$

$$z_n - z_C = re^{i\pi/6} - 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$$

$$= e^{i\pi/6} (r - 2\sqrt{3}e^{i\pi/6})$$

$$= e^{i\pi/6} \left(r - 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right)$$

$$= e^{i\pi/6} (r - 3 - \sqrt{3}i)$$

5) Montrer que la droite (OB) et le cercle $(\mathcal{C})$ sont tangents en un point que l'on déterminera.

$$\begin{cases} \pi \in [0, \pi[\setminus \{0\} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_n = e^{i\pi/6} (r - 3 - \sqrt{3}i) \\ |z_n| = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_n = e^{i\pi/6} (r - 3 - \sqrt{3}i) \\ (r - 3)^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_n = e^{i\pi/6} (r - 3 - \sqrt{3}i) \\ r - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_n = e^{i\pi/6} (r - 3 - \sqrt{3}i) \\ r = 3 \end{cases}$$

il existe une unique point $\pi \in [0, \pi[\setminus \{0\}$ et au cercle $\mathcal{C}$.

donc la droite (OB) et $\mathcal{C}$ sont tangents au point π d'affixe $3e^{i\pi/6}$.

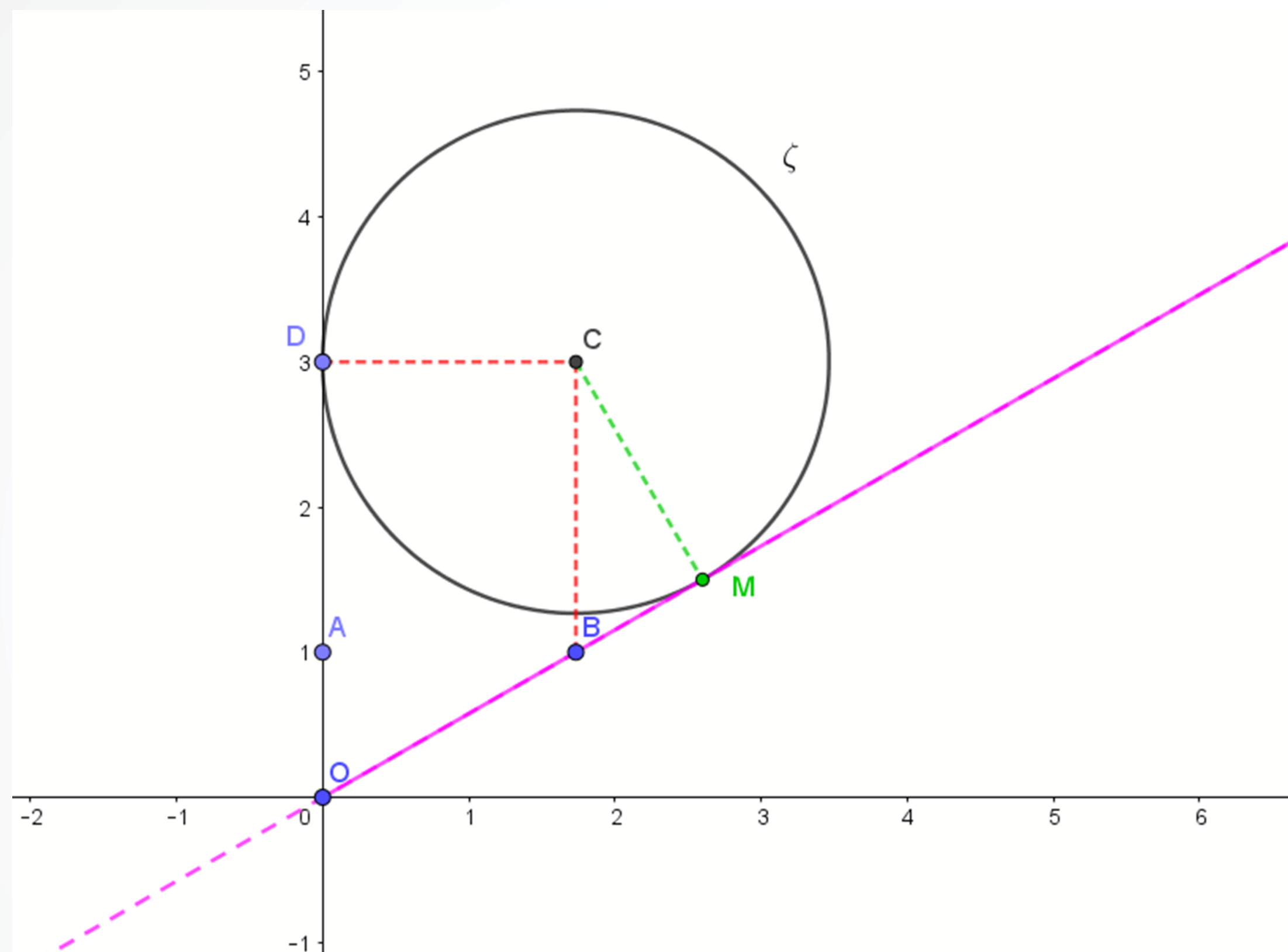
$$\text{Rq } \pi \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \arg z \in]0, \pi/2]$$

Donc il n'existe pas d'autre point de contact dans l'autre demi-droite.

$$\text{Si } \pi \in (0, \pi[\setminus [0, \pi[) \arg z_n \equiv \pi/6 (2\pi) \notin \mathcal{C}$$



Trabelsi Chokri



Exercice 4 : (7.5 points)

I/ 1) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - \ln x$.

a) Calculer $g'(x)$, $x \in]0, +\infty[$.

$$g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \\ = \frac{x-1}{x}$$

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$			
g			

g admet un minimum absolu en 1 de valeur 0 donc pour tout $x > 0$

$$\text{on } g(x) \geq 0$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Justifier que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} (n^2 - n \ln n) = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0^+} n - \ln n = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0

f admet au point $(0, 0)$ une demi-tangente verticale (d'équation $x=0$) dirigée vers le haut

3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n \ln n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Trabelsi Chokri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O\vec{j})$

4) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = x + g(x)$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= 2x - \ln x - 1 \\ &= x + x - \ln x - 1 \\ &= x + g(x) \quad ; \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[\text{ on a } g(x) > 0 \quad \forall x > 0 \\ \Rightarrow x + g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

d'où f est strictement croissante
sur $]0, +\infty[$ ainsi f est strictement
croissante sur $[0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	$+\infty$

5) a) Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1.

Soit T la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1.
Tà pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f'(1) = 1 \quad ; \quad f(1) = 1$$

d'où $T: y = x$, ainsi Δ est la tangente
à Γ au point d'abscisse 1.

b) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = x g(x)$. En déduire la position relative de (Γ) et Δ

$$f(x) - x = x^2 - x \ln x - x \quad ; \quad \forall x > 0$$

$$= x(x - \ln x - 1) = x \cdot g(x)$$

$$\text{or } \forall x > 0 ; g(x) \geq 0$$

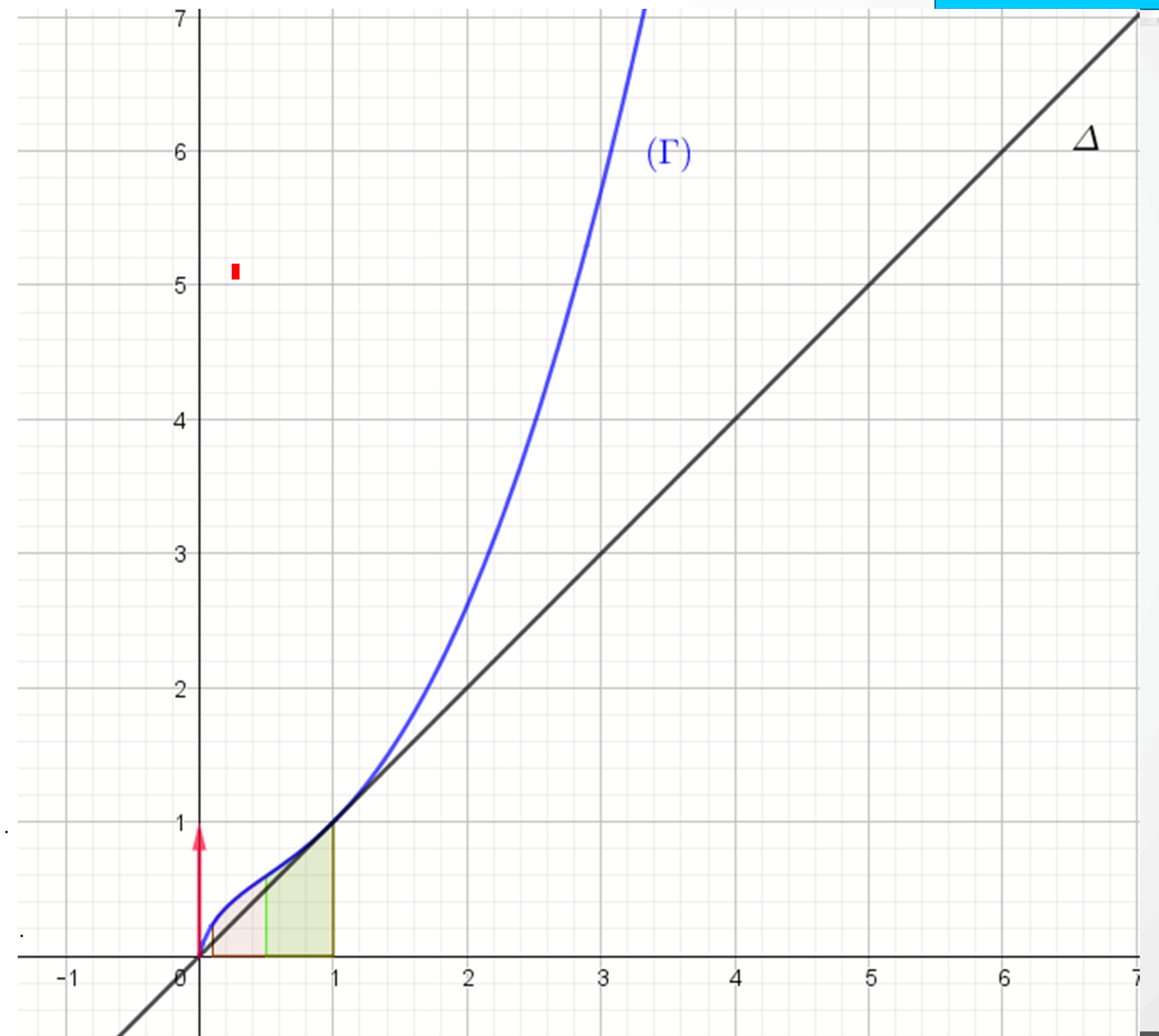
ainsi $f(x) - x \geq 0$ d'où f est au

dessus de Δ ; $\forall x > 0$

On remarque que (Γ) sempre Δ au point
d'abscisse 1.

avec Δ et (Γ) se coupent au point 0

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



III/ 1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x t \ln t \, dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$.

On peut procéder de deux façons :

1) intégration par parties.

2) Soient $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$

Vérif : F est la primitive de la fonction $x \mapsto x \ln x$ qui s'annule en 1.

$\dagger$) F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2x$$

$$= x \cdot \ln x$$

$$\dagger) F(1) = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{d'où } F(x) = \int_1^x t \ln t \, dt$$

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par A_n l'aire, en (u.a), de la partie du plan

limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$, $x = 1$ et $y = 0$.

a) Montrer que $A_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$.

f est continue et positive sur $[\frac{1}{n}, 1]$.

$$\text{d'où } A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) \, dt \quad (\text{u.a})$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^1 (t^2 - t \ln t) \, dt$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^1 t^2 \, dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 t \ln t \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{1}{n}}^1 + F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{12} - \frac{1}{3n^3} - \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2}$$



Trabelsi Chokri

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = \frac{1}{12} ; (4.a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[= \mathbb{R}$.

b) Justifier que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $a_n > 0$ tel que $f(a_n) = A_n$.

On a $A_n > 0$ et f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$, donc il existe un unique réel $a_n > 0$ tel que $f(a_n) = A_n$.

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel α et vérifier que $0.4 < \alpha < 0.5$.

La suite (A_n) est croissante (en effet

$$A_{n+1} - A_n = \int_1^{n+1} f(t) dt > 0)$$

en plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{12}$

$$\text{d'où } A_n \leq \frac{1}{12} ; \forall n \geq 2$$

Soit f^{-1} la fonction réciproque de f .

f^{-1} est continue et strictement croissante

sur $J = [0; +\infty[$.

La suite (a_n) est croissante et majorée par

$f^{-1}(\frac{1}{12})$ donc (a_n) est convergente vers

un réel α . Comme f est continue en $\frac{1}{12}$

$$\alpha = f^{-1}(\frac{1}{12})$$

$$f(0.4) = 0.52, \quad f(0.5) = 0.59$$

$$\frac{1}{12} = 0.58 \quad \text{d'où } f(0.4) < \frac{1}{12} < f(0.5)$$

$$\Rightarrow 0.4 < \alpha < 0.5$$



Trabelsi Chokri