

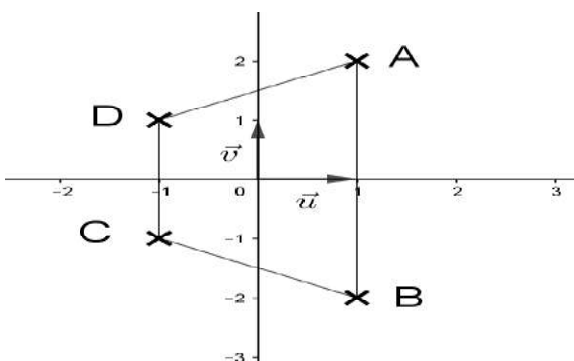
Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

Session contrôle

Exercice 1 ;(4 points)

Questions	solutions
1)	b/
2)	b/
3)	c/
4) i/	a/
ii/	c/

Exercice 2 (4 points)

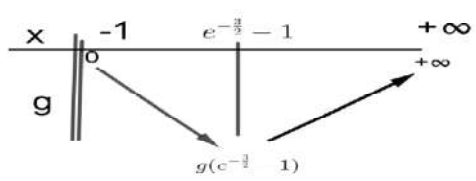
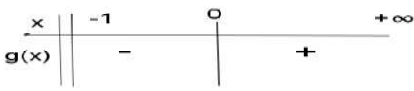
Questions	Solutions
1) a/	$(3+2i)^2 = 9+12i + (2i)^2 = 5+12i$
b/	$(E_1): z^2 + iz + 1 + 3i = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = i^2 - 4(1+3i) = -1 - 4 - 12i = -(5+12i) = [i(3+2i)]^2$ $z' = \frac{-i - i(3+2i)}{2} = -2i + 1$ $z'' = \frac{-i + i(3+2i)}{2} = i - 1$
c/	$(E_2): z^2 - iz + 1 - 3i = 0$ $z^2 - iz + 1 - 3i = 0 \Leftrightarrow \overline{z^2 - iz + 1 - 3i} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}^2 + i\overline{z} + 1 + 3i = 0$ Alors si z est solution de (E_2) alors $\overline{z}$ est solution de (E_1) Donc les solutions de (E_2) sont $1+2i$ et $-1-i$
2)	On a $(z^2 - iz + 1 - 3i)(z^2 + iz + 1 + 3i) = z^4 + 3z^2 + 6z + 10$ d'où $z^4 + 3z^2 + 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - iz + 1 - 3i)(z^2 + iz + 1 + 3i) = 0$ $\Leftrightarrow z^2 - iz + 1 - 3i = 0$ ou $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$ $\Leftrightarrow z = 1+2i$ ou $z = -1-i$ ou $z = 1-2i$ ou $z = -1+i$
3) a/	
b/	$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 1 - 2i - 1 - 2i = -4i$ $z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = -1 - i + 1 - i = -2i$ Alors $\frac{z_{\overline{AB}}}{z_{\overline{DC}}} = 2 \in \mathbb{R}$ alors $(AB) \parallel (DC)$ ainsi ABCD est un trapèze
c/	$A = \frac{(AB + DC) \times h}{2} = 6 \text{ u a}$

Exercice 3 (5 points)

Questions	Solution
1) a/	$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 4z) + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z + 2)^2 - 4 + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 2^2$ Donc S est une sphère de centre $\Omega(1, -2, -2)$ et de rayon $R = 2$
b/	$d(\Omega, P) = \frac{ 1 + 2 - 2 + 1 }{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3} < R = 2$ Donc $S \cap P$ est un cercle de centre $K(a, b, c)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\text{on } a \begin{cases} \overrightarrow{\Omega K} = \alpha \overrightarrow{n_P} \\ K \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = \alpha \\ b + 2 = -2\alpha \\ c + 2 = 2\alpha \\ a - 2b + 2c + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + 1 \\ b = -2\alpha - 2 \\ c = 2\alpha - 2 \\ \alpha + 1 - 2(-2\alpha - 2) + 2(2\alpha - 2) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{9} \\ b = -\frac{14}{9} \\ c = -\frac{22}{9} \\ \alpha = -\frac{2}{9} \end{cases}$ Alors $K(\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{22}{9})$
2)	$(K \Omega)$ est une droite qui passe par $\Omega(1, -2, -2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_P} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($\overrightarrow{n_P}$ est un vecteur normal à P) $M(x, y, z) \in (K \Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t \overrightarrow{n_P}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 2 = -2t \\ z + 2 = t \end{cases}$ Donc $(K \Omega): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
3)	Q est le plan tangent à S au point $I(\alpha, \beta, \gamma)$ donc $\overrightarrow{\Omega I} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta + 2 \\ \gamma + 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q donc $Q: (\alpha - 1)x + (\beta + 2)y + (\gamma + 2)z + d = 0 \text{ or } I(\alpha, \beta, \gamma) \in Q \text{ donc}$ $(\alpha - 1)\alpha + (\beta + 2)\beta + (\gamma + 2)\gamma + d = 0$ a/ $\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \beta^2 + 2\beta + \gamma^2 + 2\gamma + d = 0$ Et le fait que le point $I \in S$ alors

	$\alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 + 4\beta + \gamma^2 + 4\gamma + 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha - 4\beta - 4\gamma - 5$ donc on aura : $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 + 2\beta + \gamma^2 + 2\gamma + d = 0$ $\Leftrightarrow d = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha - 2\beta - 2\gamma$ $\Leftrightarrow d = -(2\alpha - 4\beta - 4\gamma - 5) + \alpha - 2\beta - 2\gamma$ $\Leftrightarrow d = -\alpha + 2\beta + 2\gamma + 5$ Ainsi $Q : (\alpha - 1)x + (\beta + 2)y + (\gamma + 2)z - \alpha + 2\beta + 2\gamma + 5 = 0$
b/	$N(-1, 2, -6)$ On a $\begin{cases} -1 = 1 + t \\ 2 = -2 - 2t \\ -6 = -2 + 2t \end{cases} \Rightarrow t = -2$ ainsi $N(-1, 2, -6) \in (K\Omega)$
c/	I est un point du cercle (C) donc $KI=2$. $\vec{I\Omega} \cdot \vec{IN} = KI^2 - KN \cdot K\Omega = 0$ d'où N est point de Q.

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$g(x) = (x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}$ et $x \in]-1, +\infty[$ On a $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)\ln(x+1) = 0$
b/	Pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a $g'(x) = \ln(x+1) + 1 + \frac{1}{2} = \ln(x+1) + \frac{3}{2}$
c/	$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} - 1$  $g(e^{-\frac{3}{2}} - 1) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{3}{2}}\right) < 0$
d/	$g(0) = 0$ 
2) a/	Soit $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = +\infty$ La représentation graphique de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
b/	$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 \ln(x+1) = -\infty$ En effet ;

	$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$ $\text{et } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 = 1$ La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la représentation graphique de f																									
c/	pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a $f'(x) = 2x \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x+1} \left((x+1) \ln(x+1) + \frac{x}{2} \right)$ $= \frac{2x}{x+1} g(x)$																									
d/	Déterminons le signe de $f'(x)$ <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>g(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$\frac{2x}{x+1}$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> Soit alors le tableau de variation de f <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	-1	0	$+\infty$	g(x)	-	0	+	$\frac{2x}{x+1}$	-	0	+	$f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$	+	0	+	x	-1	$+\infty$	f'(x)		+	f		$+\infty$
x	-1	0	$+\infty$																							
g(x)	-	0	+																							
$\frac{2x}{x+1}$	-	0	+																							
$f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$	+	0	+																							
x	-1	$+\infty$																								
f'(x)		+																								
f		$+\infty$																								
e/																										
3) a /	Pour tout $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$ Pour tout $x \neq -1$ on a $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$																									
b /	$I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$ On intègre par partie $u(x) = \ln(x+1)$ $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ $v'(x) = x$ $v(x) = \frac{1}{2}x^2$																									

	$I_1 = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ $= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$ Donc $= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^1$ $= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) = \frac{1}{4}$
4) a /	On pose $h(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$ h est une fonction dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $h'(x) = \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{(x+1)} - 1 = \ln(x+1)$ ainsi h est une primitive de la fonction $x \rightarrow \ln(x+1)$ sur $] -1, +\infty[$
b/	On va utiliser une intégration par partie $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx$ on pose $u(x) = x^{n+1} \quad u'(x) = (n+1)x^n$ $v'(x) = \ln(x+1) \quad v(x) = h(x)$ $I_{n+1} = \left[x^{n+1} h(x) \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n h(x) dx = 2 \ln 2 - 1 - (n+1) \int_0^1 x^n [(x+1) \ln(x+1) - x] dx$ Donc $= 2 \ln 2 - 1 - (n+1) \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - (n+1) \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx + (n+1) \int_0^1 x^{n+1} dx$ $= 2 \ln 2 - 1 - (n+1) I_{n+1} - (n+1) I_n + \frac{n+1}{n+2}$ Ainsi on déduit que $(n+2) I_{n+1} = -1 + 2 \ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1) I_n$
c/	Pour $n = 1$ on trouve $3I_2 = -1 + 2 \ln 2 + \frac{2}{3} - 2I_1$ alors on déduit que $I_2 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6} = -\frac{5}{18} + \frac{2}{3} \ln 2$ I_2 est l'aire de la partie du plan illimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = 0$ et $x = 1$