

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Science expérimentales)

Session de contrôle 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- Produit vectoriel dans l'espace
- Droites et plans de l'espace
- Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan
- Volume d'un tétraèdre

1. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \text{ ainsi } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b. On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}| = \frac{1}{6} |-4 - 8| = 2$

2. Puisque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vecteur normal à P donc $P : 2x + 2y + 4z + d = 0$

On a $C(0;0;2) \in P$ donc $d = -8$ ainsi $P : x + y + 2z - 4 = 0$

3.

a. On a $M(x;y;z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + (z+1)^2 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$$

donc S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

b. On a $d(I,P) = \frac{|-1+1-2-4|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6} < \sqrt{11}$ donc $P \cap S$ est un cercle de rayon

$$r = \sqrt{11-6} = \sqrt{5}$$

c. On a $B \in P$ et $C \in P$ et puisque $0^2 + 4^2 + 0^2 + 2 \times 0 - 2 \times 4 + 2 \times 0 - 8 = 0$ donc $B \in S$ et puisque $0^2 + 0^2 + 2^2 + 2 \times 0 - 2 \times 0 + 2 \times 2 - 8 = 0$ donc $C \in S$ de plus

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ donc } [BC] \text{ est un diamètre du cercle } (\zeta) \text{ et ainsi}$$

$$H = B * C \text{ d'où } H(0;2;1)$$

4. a. On a $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} x_M - 1 = -a \\ y_M - 1 = 3a \\ z_M - 1 = -a \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_M = 1 - a \\ y_M = 1 + 3a \\ z_M = 1 - a \end{cases}$ ainsi

$$M(1-a; 1+a; 1-a)$$

b. on a $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} 1-a \\ 3a-3 \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} 1-a \\ 1+3a \\ -1-a \end{pmatrix}$ d'où

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = (1-a)^2 + (3a-3)(1+3a) - (1-a)^2 = 11a^2 - 3 - 8a = (a-1)(11a+3)$$

c. On a $E \in (AB) \cap (\zeta) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} \\ (a-1)(11a+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} \\ a=1 \text{ ou } a=-\frac{3}{11} \end{cases}$

pour $a=1$ on a $E(0;2;0)$ or puisque $H(0;2;1)$ donc $HE=1 \neq \sqrt{5}$ d'où $E \notin (\zeta)$

ainsi $a = -\frac{3}{11}$ d'où $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}$

d. On a $V' = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}| = \frac{1}{6} \left| \left(-\frac{3}{11} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AI} \right| = \frac{3}{11} \left[\frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}| \right] = \frac{3}{11} V$

Exercice n°2 :

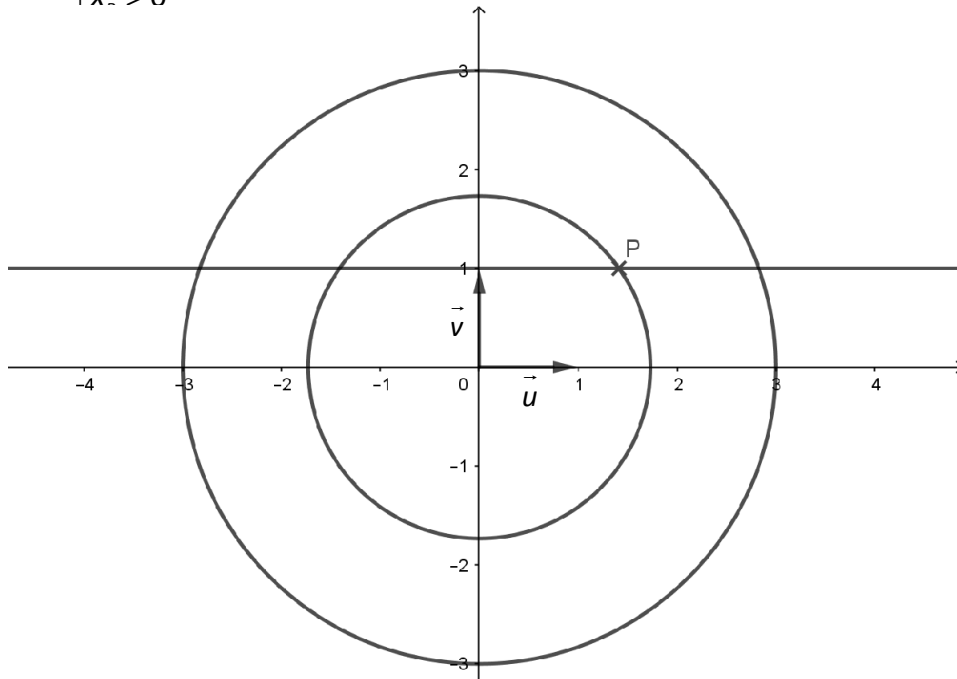
De quoi s'agit-il ?

- Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
- Complexe et géométrie

I.

1. a. On a $OP = |P| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ d'où $P \in (C)$

b. On a $\begin{cases} y_P = 1 \\ x_P > 0 \end{cases}$ et $P \in (C)$ donc $P \in (C) \cap \Delta : y=1$ avec $x_P > 0$ d'où la construction



c. On a $\begin{cases} \arg(P) \equiv \alpha[2\pi] \\ |P| = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow P = \sqrt{3}e^{i\alpha}$

2.

a. On a $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{OQ}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{OP}}\right) + \left(\widehat{\vec{OP}, \vec{OQ}}\right)[2\pi] \equiv \alpha + \alpha[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$

b. On a $Q \in (C')$ donc $|q| = 3$ et puisque $\arg(q) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \vec{OQ}}\right)[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$ d'où $q = 3e^{i2\alpha}$

c. On a $p^2 = (\sqrt{3}e^{i\alpha})^2 = 3e^{i2\alpha} = q$ donc $q = (\sqrt{2} + i)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} - 1 = 1 + 2i\sqrt{2}$

II.

1. a. On a $\Delta = 64 - 4 \times 16 \times 9 = -512$ d'où $\delta = i\sqrt{512} = 16\sqrt{2}i$

d'où $z' = \frac{8 - 16i\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z' = \frac{8 + 16i\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z' = \frac{\bar{q}}{4}$ et $z'' = \frac{q}{4}$

b. On pose $Z = z^2$

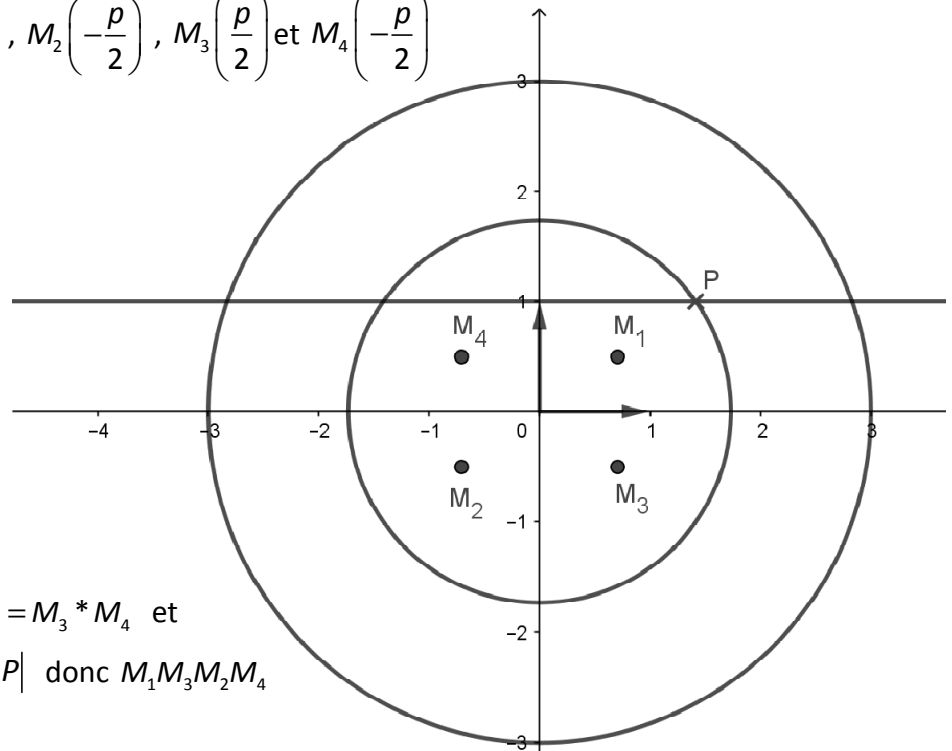
On a z solution de (E') équivaut à $Z^2 - 8Z + 9 = 0$ équivaut à $Z = \frac{q}{4}$ ou $Z = \frac{\bar{q}}{4}$

équivaut à $z^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ou $z^2 = \frac{\bar{p}^2}{4} = \left(\frac{\bar{p}}{2}\right)^2$

équivaut à $z = \frac{p}{2}$ ou $z = -\frac{p}{2}$ ou $z = \frac{\bar{p}}{2}$ ou $z = -\frac{\bar{p}}{2}$

Conclusion : $S_C = \left\{ \frac{p}{2}; -\frac{p}{2}; \frac{\bar{p}}{2}; -\frac{\bar{p}}{2} \right\}$

2. a. On a $M_1\left(\frac{p}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{p}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$ et $M_4\left(-\frac{\bar{p}}{2}\right)$



b. On a $M_1 * M_2 = M_3 * M_4$ et

$M_1 M_2 = M_3 M_4 = |P|$ donc $M_1 M_3 M_2 M_4$

est un rectangle

Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- Utiliser un graphique
- Fonction en exponentielle (limites, variations, branches infinies)
- Calcul d'aires
- Fonctions primitives

A. 1. a. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+1)^2 - xe^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{(x+1)^2}{x} - e^x \right] = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 - xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x} - e^x \right] = -\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

b. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)^2 - xe^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{(x+1)^2}{x^2} - \frac{e^x}{x} \right] = -\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 - xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{(x+1)^2}{x^2} - \frac{e^x}{x} \right] = -\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2(x+1) - e^x - xe^x = 2(x+1) - e^x(x+1) = (x+1)(2 - e^x)$$

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \ln 2$ et on a $2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$

d'où

x	$-\infty$	-1	$\ln 2$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$2 - e^x$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	e^{-1}	$1 + (\ln 2)^2$	

3. a. On a $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 1$ d'où $T: y = x + 1$

b. Puisque (Γ) est au dessus de (Δ) donc $e^x - (x+1) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

autrement : Soit $h: x \mapsto e^x - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x) = e^x - 1$ d'où

D'où $h(x) = e^x - (x+1) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - f(x) = e^x - (x+1)^2 + xe^x = (x+1)(e^x - x - 1)$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) - f(x) = xe^x - x^2 - x = x(e^x - x - 1)$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - f(x) = (x+1)(e^x - (x+1)) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$ d'où

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$e^x - f(x)$	$-$	0	$+$	$+$

Conclusion : Γ au dessous de (C_f) pour tout $x \in]-\infty; -1[$

Γ au dessus de (C_f) pour tout $x \in]-1; +\infty[\setminus \{0\}$

Γ coupe (C_f) aux points $(-1; e^{-1})$ et $(0; 1)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1) - f(x) = x(e^x - (x+1)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ d'où

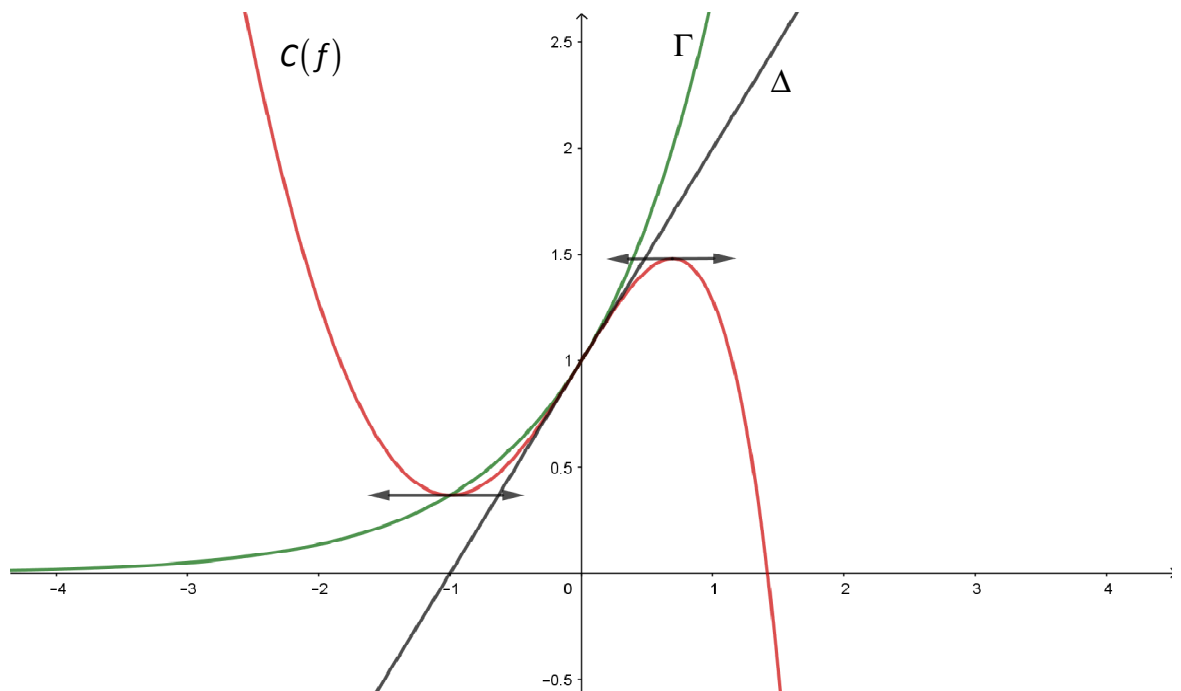
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(x+1) - f(x)$	$-$	0	$+$

Conclusion : Δ au dessous de (C_f) pour tout $x \in]-\infty; 0[$

Δ au dessus de (C_f) pour tout $x \in]0; +\infty[$

Γ coupe (C_f) au point $(0; 1)$

5.



6. On a

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^0 e^x + xe^x - x^2 - 2x - 1 dx = \left[xe^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{e} + \frac{1}{3} - 1 + 1 \right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- Utiliser un graphique
- Fonction $\sqrt[n]{}$
- Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ (monotonie, raisonnement par récurrence, absurde, convergence)

1. Soit $M(x; y) \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$

$$\text{On a } M \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{4x} = x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$$\text{d'où } \alpha = \sqrt[3]{4}$$

2.

a. On a $u_0 = 4$, $u_1 = f(4) = 1$, $u_2 = f(1) = 2$ et $u_3 = f(2) = \sqrt{2}$ donc

$$u_1 < u_3 < u_2 < u_0$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Pour $n=0$ on a $u_0 = 4 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

$$\text{On a } u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2}{\sqrt{u_n}} > 0$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $u_{n+1} \leq u_n$ alors $0 < \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ ainsi

$$\frac{2}{\sqrt{u_{n+1}}} \geq \frac{2}{\sqrt{u_n}} \text{ donc } u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

d.

Puisque si $u_{n+1} \leq u_n$ alors $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ donc (u_n) n'est pas décroissante

Et si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $0 < \sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_{n+1}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ d'où $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

donc (u_n) n'est pas croissante

Conclusion : (u_n) n'est pas monotone

3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}}}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x}} = 2^{\frac{2}{4}}x^{\frac{1}{4}} = (4x)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4x} = g(x)$$

4.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(v_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} = v_{n+1}$

$$g(w_n) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = w_{n+1}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$

Pour $n=0$, on a $u_1 < u_3 < \alpha < u_2 < u_0$ d'où $v_0 < v_1 < \alpha < w_1 < w_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$

montrons que $v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$

on a $0 < v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$ et g croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$g(v_n) < g(v_{n+1}) < g(\alpha) < g(w_{n+1}) < g(w_n) \text{ d'où } v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$

c. On a (v_n) est une suite croissante et majorée par α donc convergente

vers $\ell \in [0; +\infty[$ et puisque $v_{n+1} = g(v_n)$ et g continue sur $[0; +\infty[$ d'où

$g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0; \alpha\}$ et puisque $v_n \geq v_0 = 1 > 0$ d'où $\ell > 0$ ainsi

$$\ell = \alpha$$

On a (w_n) est une suite décroissante et minorée par α donc convergente

vers $\ell \in [0; +\infty[$ et puisque $w_{n+1} = g(w_n)$ et g continue sur $[0; +\infty[$ d'où

$g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0; \alpha\}$ et puisque et puisque $0 < \alpha \leq w_n \leq w_0 = 4$

d'où $\ell > 0$ donc $\ell = \alpha$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \alpha \text{ équivaut à } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$