

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session de contrôle 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit-il ?

- Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre
- Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace
- Sphère : Caractérisation
- Positions relatives d'une sphère et d'un plan

1°) a) $\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

b) $\Rightarrow \Omega = C * D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

b) $V_{(OAE G)} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AO}|$ avec $\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} |-27 + 0 + 0| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD)

Donc $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P \perp (CD)$.

b) Soit $P' : x - y - z - 3 = 0$

$\Rightarrow 3 - 0 + 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$.

$\Rightarrow 3 - 3 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in P'$.

$\Rightarrow 0 - 0 + 3 - 3 = 0$ donc $G \in P'$.

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P : x - y + z - 3 = 0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x - 9y + 9z + d = 0$,

Or $A(3,0,3) \in P$ signifie $9 \times 3 - 9 \times 0 + 9 \times 0 + d = 0$ signifie $d = -27$

Donc $P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0$ signifie $P : x - y + z - 3 = 0$.

4) a) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

signifie $(S) : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), P: x - y + z - 3 = 0$ donc $d(\Omega, P) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$d(\Omega, P) = R.$ Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x, y, z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

$$\text{Signifie } \begin{cases} H \in P \\ H \in D\left(\Omega, \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} \frac{3}{2} + \alpha - \frac{3}{2} + \alpha + \frac{3}{2} + \alpha - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Ainsi } H(2, 1, 2)$$

Exercice 2 :

De quoi s'agit-il ?

- Racines cubiques d'un nombre complexe donné
- Construction de points $M(z)$ sachant $|z|$ et $\arg(z)$
- Complexe et géométrie

A/

1) a) $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

b) $Z^3 = 2\sqrt{2}i = (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z = 2\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}.$

Signifie $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$ sont

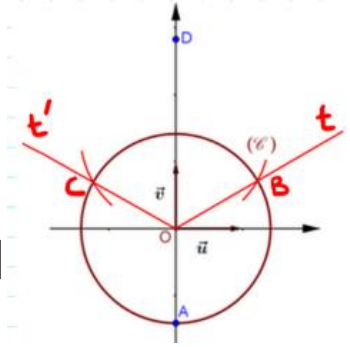
$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$2) \text{ a) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B| = \sqrt{2} \\ \arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie $B \in \zeta \cap [Ot)$ où $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C| = \sqrt{2} \\ \arg(z_C) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie $C \in \zeta \cap [Ot')$ où $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot'}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.



$$\text{b) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Autrement : } \Rightarrow z_C &= \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\overline{z_B}. \\ &= -\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Rightarrow z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = -\sqrt{6}.$$

$$\Rightarrow z_{\overline{AD}} = z_D - z_A = 3\sqrt{2}i.$$

$$\text{Donc } \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{BC}}} = -\sqrt{3}i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}. \text{ Ainsi } (BC) \perp (AD).$$

Autrement : $z_C = -\overline{z_B}$ signifie $S_{(O, \vec{v})}(B) = C$ signifie $(O, \vec{v}) \perp (BC)$

Or $(O, \vec{v}) = (AD)$, Ainsi $(BC) \perp (AD)$.

$$\text{d) } \Rightarrow z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow z_{\overline{BD}} = z_D - z_B = 2\sqrt{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Donc $z_{\overline{AC}} = z_{\overline{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC) \perp (AD)$;

Ainsi ABDC est un losange.

$$\text{B/ 1) a) } \Rightarrow z_N^3 = \left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = \alpha^3 e^{i2\pi} = \alpha^3.$$

$$\Rightarrow z_P^3 = \left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)^3 = \alpha^3 e^{-i2\pi} = \alpha^3.$$

$$\text{b) } \Rightarrow z_N^3 = z_P^3 = \alpha^3.$$

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul α^3 sont z_N, z_P et z_M

et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) $\Rightarrow$ MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et $MN = MQ$
signifie MNQP est un parallélogramme (car MNP est un triangle équilatéral)

$$\text{signifie } z_{\overline{MN}} = z_{\overline{PQ}} \quad \text{signifie } z_N - z_M = z_Q - z_P \quad \text{signifie } z_Q = -z_M + z_P + z_N$$

$$\text{signifie } \alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{signifie } \alpha^3 = -\alpha + \alpha \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)$$

$$\text{signifie } \alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{signifie } \alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{signifie } \alpha^3 = -2\alpha.$$

$$\text{b) } \Leftrightarrow \text{MNQP est un losange} \quad \text{signifie } \alpha^3 = -2\alpha \quad \text{signifie } \alpha(\alpha^2 + 2) = 0$$

$$\text{signifie } \alpha^2 + 2 = 0 \quad \text{car } \alpha \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{signifie } \alpha^2 = -2 \quad \text{signifie } \alpha = i\sqrt{2} \text{ ou } \alpha = -i\sqrt{2}.$$

Exercice 3 :

De quoi s'agit-il ?

- **Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique**
- **Fonction réciproque**
- **Résolution d'équations**

$$1) \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0 \text{ et } \ln(x+1) > 0 \text{ pour tout } x > 0 \text{ donc } \lim_{0^+} f = -\infty.$$

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote à ($\mathcal{C}$).

$$\text{b) Pour tout } x \in]0, +\infty[; \quad \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1).$$

$$\text{c) } \lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0. \text{ Ainsi } \lim_{+\infty} f = 1.$$

La droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{a) Pour tout } x \in]0, +\infty[; \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)} \\ &= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)} \\ &= \frac{x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}. \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$;
$$f'(x) = \frac{x \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x) \right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$
$$= \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x \in]0, +\infty[$; $1 + \frac{1}{x} > 1$ et $x+1 > 1$

Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$ et $\ln(x+1) > 0$

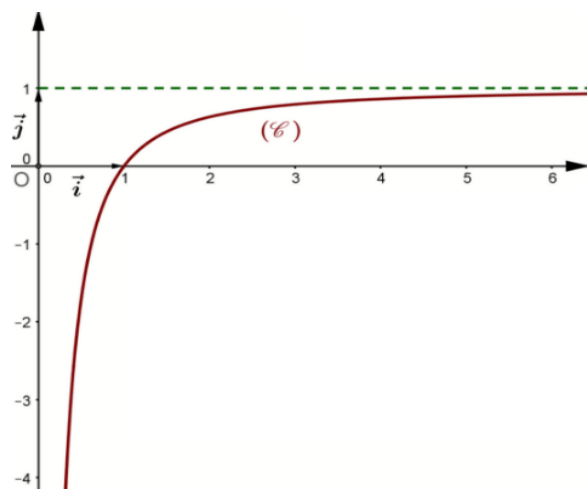
Ainsi $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) > 0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$.

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) > 0$ Par suite f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	1

d)



3) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $] -\infty, 1[$.

4) a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 1$ car f^{-1} est continue en 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

b) pour tout $n \geq 2$; $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n) = \frac{1}{n}$

signifie $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n + 1)} = \frac{1}{n}$

signifie $n \ln(a_n) = \ln(a_n + 1)$

signifie $\ln((a_n)^n) = \ln(a_n + 1)$

signifie $(a_n)^n = a_n + 1$.

Ainsi a_n est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + 1) = 2$.

Exercice 4 :

De quoi s'agit-il ?

- **Lecture graphique**
- **Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle**
- **Modélisation**

1) a) $f(0) = 0$; $f'(0) = \frac{+1}{+2} = \frac{1}{2}$.

b) f est solution de l'équation $y' = ay + b$ donc $f'(x) = a f(x) + b$, pour tout réel x .

d'où $f'(0) = a f(0) + b$ ainsi ; $b = f'(0) = \frac{1}{2}$.

2) a) f solution de l'équation : $y' = ay + \frac{1}{2}$

Donc $f'(x) = a f(x) + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Signifie $a f(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$ signifie $f(x) = \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right)$ car $a \neq 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right)$.

b) S est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } S &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{a} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{a} (f(4) - 2 - (f(0) - 0)) = \frac{1}{a} (2 - 2e^{-1} - 2) = \frac{-2e^{-1}}{a}.\end{aligned}$$

c) On a $S = \frac{-2e^{-1}}{a} = 8e^{-1}$ signifie $a = \frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}} = -0,25$.

3) f solution de l'équation différentielle $y' = -0,25 y + \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } f(x) = ce^{-0,25x} - \frac{\frac{1}{2}}{-0,25} = ce^{-0,25x} + 2.$$

Or $f(0) = 0$ signifie $c + 2 = 0$ signifie $c = -2$

Ainsi $f(x) = 2 - 2e^{-0,25x}$.

4) a) $h(3) = 2 - 2e^{-0,25 \times 3} = 2 - 2e^{-0,75} \approx 1,05\text{m}.$

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

b) $h(t) > 1,98$ signifie $2 - 2e^{-0,5t} > 1,98$ signifie $2e^{-0,5t} < 0,02$ signifie $e^{-0,5t} < 0,01$

$$\text{signifie } -0,5t < \ln(0,01) \text{ signifie } t > -\frac{\ln(0,01)}{0,5} \approx 18,42.$$

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.