

CORRIGE

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul, équation complexe du second degré, forme exponentielle d'un nombre complexe non nul et interprétation géométrique.
- ✓ **Aptitudes visées :** reconnaître une racine $5^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, vérifier une équation complexe, écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer un lieu géométrique d'un point variable.

✓ **Corrigé :**

Les choix corrects sont :

1°) Vrai : Si $u^5 = v^5 = 1$ alors $(u.v)^5 = 1$

2°) Vrai : il suffit de faire une vérification.

3°) Faux : Un argument du nombre complexe $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $\frac{7\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$

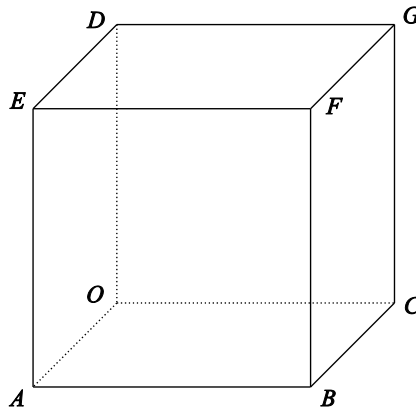
4°) Vrai : θ décrit seulement l'intervalle $[0, \pi]$ (demi-cercle)

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu :** produit vectoriel, équations de droites, plans et sphères de l'espace, positions relatives de plans et sphères.
- ✓ **Aptitudes visées :** calculer un produit vectoriel, déterminer une représentation paramétrique d'une droite et une équation cartésienne d'un plan, reconnaître une à partir de son équation, étudier la position relative d'une sphère et un plan.

✓ **Corrigé :**

1°) a°)



Dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$, on a : $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ et $D(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, par conséquent, $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1°) b°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACD) , d'où :

$$(ACD): x + y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

L'écriture $A(1,0,0) \in (ACD) \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ permet alors de conclure :

$$(ACD): x + y + z - 1 = 0.$$

2°) a°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

Le point $O(0,0,0)$ est un point de la droite (Δ) .

$$\text{Alors } (\Delta): \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2^\circ) \text{ b}^\circ) H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ACD) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = \alpha \\ x_H + y_H + z_H - 1 = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha \\ y_H = \alpha \\ z_H = \alpha \\ 3\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{3} \\ y_H = \frac{1}{3} \\ z_H = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

3°) a°) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a:

$$(\mathcal{S}_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}_m): (x-m)^2 - m^2 + (y-m)^2 - m^2 + (z-m)^2 - m^2 - 1 + 3m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{S}_m): (x-m)^2 + (y-m)^2 + (z-m)^2 = 1$$

On en déduit que l'ensemble $(\mathcal{S}_m)$ est une sphère de centre $I_m(m, m, m)$ et de rayon $R=1$.

3°) b°) $(\mathcal{S}_m)$ passe par le point $A \Leftrightarrow A(1, 0, 0) \in (\mathcal{S}_m)$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 + (0-m)^2 + (0-m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad m = \frac{2}{3}$$

4°) a°) On a : $I_0(0, 0, 0) \in (\Delta)$.

$$\text{On a : } I_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \in (\Delta).$$

En fait : Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $I_m(m, m, m) \in (\Delta)$: Les sphères $(\mathcal{S}_m)$ sont, toutes, centrées sur (Δ) .

4°) b°) Plusieurs méthodes sont possibles :

Méthode 1 :

Toutes les sphères $(\mathcal{S}_m)$ étant centrées sur la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ACD) , le projeté orthogonal H de leurs centres I_m sur le plan (ACD) est le même, à savoir $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (déterminé à la question 2°) b°)).

En particulier, les deux sphères $(\mathcal{S}_0)$ et $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$, de même rayons $R_0 = R_{\frac{2}{3}} = 1$ coupent le plan (ACD)

puisque le point $A \in (ACD)$ appartient également, selon 3°) b°), aux deux sphères $(\mathcal{S}_0)$ et $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$,

suivant un même cercle $(\mathcal{C})$ de centre $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon $HA = \dots = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Méthode 2 :

$$\text{On a : } \begin{cases} (\mathcal{S}_0): x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (\mathcal{S}_{\frac{2}{3}}): \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

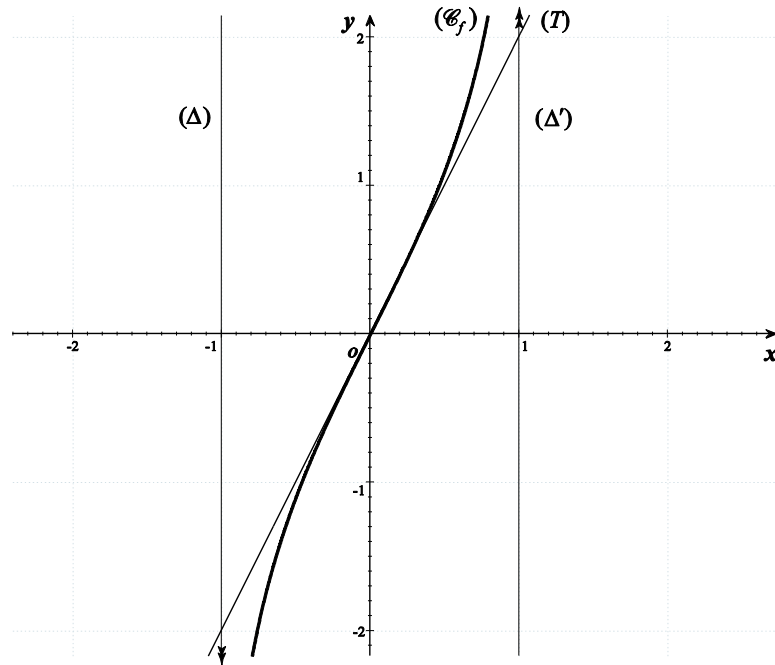
Comme les trois points $A(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ et $D(0, 0, 1)$ appartiennent, tous les trois, aussi bien à la sphère $(\mathcal{S}_0)$ qu'à la sphère $(\mathcal{S}_{\frac{2}{3}})$ (aisément vérifiable), ces deux dernières se coupent

alors suivant un même cercle, à savoir, le cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC .

Exercice 3 :

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions , fonction réciproque, courbe d'une fonction, calcul intégral, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** lire graphiquement une courbe, déterminer la réciproque d'une fonction bijective et construire sa courbe, calculer une aire.
- ✓ **Corrigé :**

1°)



$f(0) = 0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

$f'(0) = 2$: lecture graphique de la pente de la droite (T) , tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O

2°) a°) $g(0) = 0$: g étant la fonction réciproque de f , on a l'équivalence

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x .$$

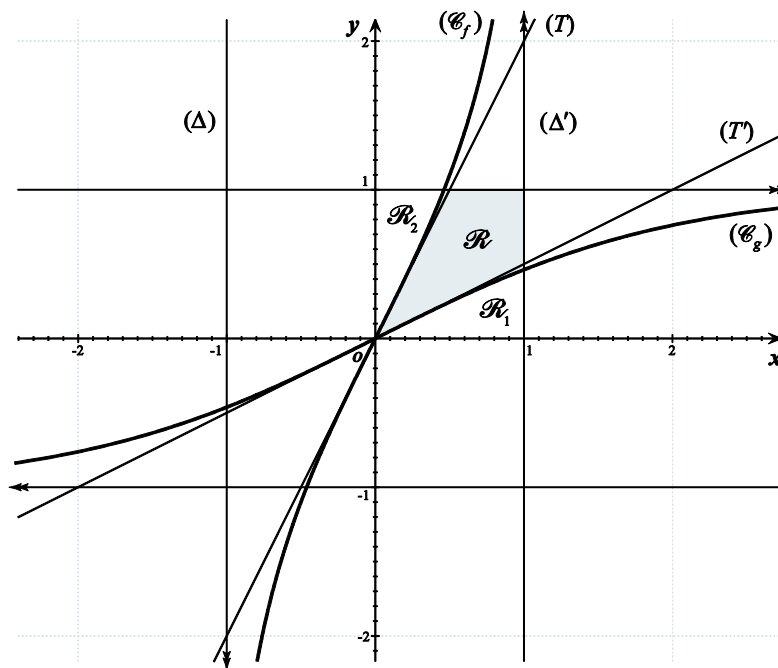
$$g'(0) = \frac{1}{2} : \text{ formule de dérivée d'une réciproque : } g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} .$$

2°) b°) Le tracé est jugé sur la présence des quatre éléments suivant :

- Tracé correct de deux asymptotes horizontales d'équations cartésiennes $y = 1$ et $y = -1$
- Tracé correct d'une droite (T') tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point O , de pente $\frac{1}{2}$.
- Tracé correct de l'allure de $(\mathcal{C}_g)$

4° a°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{e^x (1 + e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

5°) a°) L'aire $\mathcal{A}$ demandé est celle de la région $\mathcal{R}$ du plan, décrite dans l'énoncé, et hachurée dans la figure suivante :



L'aire $\mathcal{A}$ de cette région $\mathcal{R}$, est celle du carré unité, duquel on soustrait les deux aires des deux régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies par :

$\mathcal{R}_1$: domaine limité par les droites d'équations respectives $y = 0$ et $x = 1$ et la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

$\mathcal{R}_2$: domaine limité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

On a ainsi : $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = 1 - [\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)]$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\mathcal{A}(\mathcal{R}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \int_0^1 g(x) dx$.

On en déduit alors que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) = 1 - 2\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = 1 - 2 \int_0^1 g(x) dx$.

5°) b°) On a : $\mathcal{A} = 1 - 2 \int_0^1 g(x) dx = 1 - 2[2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1] = 3 + 4\ln 2 - 4\ln(e+1)$ (ua)

Exercice 4 :

✓ **Contenu** : suites réelles, raisonnement par récurrence, suites adjacentes, convergence d'une suite, limite d'une suite.

✓ **Aptitudes visées** : montrer une proposition par récurrence, montrer que deux suites sont adjacentes, déterminer la limite d'une suite.

✓ **Corrigé** :

1°) a°) On a : $t_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

On a : $t_1 = v_1 - u_1 = [(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0] - [\alpha u_0 + (1-\alpha)v_0] = 1 - \alpha + 2\alpha - \alpha - 2(1-\alpha) = 2\alpha - 1$.

1°) b°) Deux approches peuvent être adoptées :

Méthode 1 : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $t_0 = 1 = (2\alpha - 1)^0$, ($\alpha \neq \frac{1}{2}$).

- Preuve de l'hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $t_p = (2\alpha - 1)^p$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que $t_{p+1} = (2\alpha - 1)^{p+1}$.

$$\begin{aligned}\text{On a } t_{p+1} &= v_{p+1} - u_{p+1} = [(1-\alpha)u_p + \alpha v_p] - [\alpha u_p + (1-\alpha)v_p] = (1-2\alpha)u_p + (2\alpha-1)v_p \\ &= (2\alpha-1)(v_p - u_p) = (2\alpha-1)t_p = (2\alpha-1)(2\alpha-1)^p \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\ &= (2\alpha-1)^{p+1}\end{aligned}$$

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (2\alpha - 1)^n$

Méthode 2 : (Utilisation des suites géométriques) :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] = (1-2\alpha)u_n + (2\alpha-1)v_n \\ &= (2\alpha-1)(v_n - u_n) = (2\alpha-1)t_n\end{aligned}$$

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite géométrique de premier terme $t_0 = 1$ et de raison $q = 2\alpha - 1$.

Son terme général t_n s'écrit alors : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 q^n = (2\alpha - 1)^n$.

1°) c°) Le réel α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ou encore $(2\alpha - 1) \in]0, 1[$.

Par conséquent on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\alpha - 1)^n = 0$, puisque $(2\alpha - 1) \in]-1, 1[$.

2°) a°) Etudions le signe de $u_n - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -t_n = -(2\alpha - 1)^n \leq 0$ puisque $2\alpha - 1 > 0$.

On en déduit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leq 0 \Leftrightarrow u_n \leq v_n$

2°) b°)

■ Sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] - u_n = (1-\alpha)(v_n - u_n) = (1-\alpha)t_n \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors croissante.

■ Sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - v_n = (\alpha-1)(v_n - u_n) = (\alpha-1)t_n \leq 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors décroissante.

2°) c°) Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont ainsi adjacentes et convergent, par conséquent, vers une même limite ℓ .

2°) d°)

■ Montrons que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$.

Deux approches peuvent être adoptées :

Méthode 1 : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

• Initialisation :

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on a : } u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$$

• Preuve de l'hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $u_p + v_p = 3$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, $u_{p+1} + v_{p+1} = 3$

$$u_{p+1} + v_{p+1} = [(1-\alpha)u_p + \alpha v_p] - [\alpha u_p + (1-\alpha)v_p] = u_p + v_p = 3 \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence})$$

• Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$

Méthode 2 : (Utilisation de suites constantes) :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + v_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] + [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] = u_n + v_n$$

La suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi constante, et on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 3$

■ Déduisons la valeur de la limite commune ℓ .

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergentes et convergeant vers une même limite ℓ , on a ,

par passage à la limite dans la relation $u_n + v_n = 3$: $2\ell = 3 \Leftrightarrow \ell = \frac{3}{2}$.