

N° d'inscription

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.  
(La page 4/4 est à rendre avec la copie)**

**Exercice 1(5 points)**

1) On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 + (1+i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$ .

- Vérifier que -2 est une solution de (E).
- Trouver l'autre solution.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = -2$ ,  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_C = -z_B$  et le cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre O et passant par A.

- Montrer que B est un point du cercle ( $\mathcal{C}$ ).
  - Construire alors le point B puis le point C.
  - Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
- La droite (AC) coupe l'axe imaginaire en un point D.
  - Placer le point D.
  - On pose  $z_D = ia$  où a est un réel.

Montrer que  $(z_A - z_C)(\overline{z_A - z_D}) = 2 + a\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - a)$ .

- En déduire que  $a = 2\sqrt{3}$ .
- 4) Montrer que le point C est le milieu du segment  $[AD]$ .

**Exercice 2 (4 points)**

1) Justifier que  $\text{PGCD}(575, 75) = 25$ .

2) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les équations (E) :  $23x + 3y = 1$  et (E') :  $23x + 3y = 64$ .

a) Vérifier que (-1, 8) est une solution de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E').

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E') est  $\{(-64 + 3k, 512 - 23k), k \in \mathbb{Z}\}$ .

3) Un centre d'appel a acheté n écrans au prix de 575 DT l'unité et p casques au prix de 75 DT l'unité. Le coût total de cet achat s'élève à 1600 DT.

a) Montrer que (n, p) vérifie l'équation (E').

b) Déterminer le nombre d'écrans et de casques achetés par le centre d'appel.

### Exercice 3 (4 points)

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  et  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) a) Montrer que  $A$  est inversible. (On notera  $A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$ )  
b) Calculer  $A^2$  et en déduire que  $A^2 + 4A = 5I_3$ .  
c) Montrer alors que  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 2) On considère le système (S) suivant : 
$$\begin{cases} -3x + 2y + 2z = -10 \\ 2x - 3y + 2z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = 20 \end{cases}$$
 où  $x, y$  et  $z$  des réels.  
a) Donner l'écriture matricielle de (S).  
b) Résoudre alors (S).

### Exercice 4 (7 pts)

I. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x+1)e^x + 1$ .

- 1) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = (x+2)e^x$ .
- 2) a) Etudier les variations de  $g$ .  
b) Déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) > 0$ .

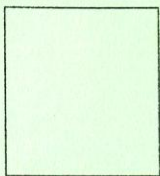
II. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x + x$ .

On désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que la droite  $\Delta: y = x$  est une asymptote à  $(\Gamma)$  au voisinage de  $-\infty$ .  
b) Etudier la position relative de  $(\Gamma)$  et  $\Delta$ .  
c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Montrer que le point  $I(-2, f(-2))$  est un point d'inflexion de  $(\Gamma)$ .  
b) On désigne par  $T$  la tangente à  $(\Gamma)$  au point  $I$ .

Montrer qu'une équation de  $T$  est :  $y = \frac{1}{e^2} [(e^2 - 1)x - 4]$ .

- c) Vérifier que le point  $K(-4, -4)$  est un point de  $T$ .
- 4) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $\Delta$  et on a placé le point  $I$ . Placer le point  $K$  puis Tracer la tangente  $T$  et la courbe  $(\Gamma)$ .
- 5) Soit  $n$  un entier naturel non nul.
- a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_{-n}^0 x e^x dx = n e^{-n} + e^{-n} - 1$ .
- b) On désigne par  $A_n$  l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par  $(\Gamma)$ ,  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = -n$  et  $x = 0$ .
- Déterminer  $A_n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .



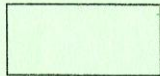
Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....  
.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique**  
**Session principale (2026)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

