

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences de l'informatique	
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3	

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages. (La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie)

Exercice N°1 :(5 points)

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2iz - 4 = 0$.
- Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a : $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)$.
 - Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 8i$.
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} + i$.

Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A et on a tracé le cercle (C) de centre O et passant par A.

 - Montrer que les points B et D appartiennent au cercle (C).
 - Construire les points B et D.
 - Montrer que le triangle ABD est équilatéral.
- La tangente T_1 à (C) en A et la tangente T_2 à (C) en B se coupent au point E.

 - Justifier que l'affixe du point E s'écrit comme $z_E = x - 2i$, où x est un réel.
 - Montrer que $(z_E - z_B)\overline{z_B} = x\sqrt{3} - 6 - i(x + 2\sqrt{3})$.
 - Déduire que $z_E = 2\sqrt{3} - 2i$.
- Prouver que le quadrilatère AEBC est un losange.
 - Montrer que l'aire du losange AEBC, en unité d'aire, est égale à $6\sqrt{3}$.

Exercice N°2 :(4 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $4x - 3y = 6$.

- Vérifier que le couple $(3, 2)$ est une solution de l'équation (E).
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(3, 2), B(7, -1) et M(x, y), où x et y sont deux entiers relatifs.

Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si et seulement si le couple (x, y) est solution de l'équation (E).

3) Soit le point $C(3+6 \times 7^{1445}, 2+8 \times 7^{1445})$.

a) Vérifier que le couple $(3+6 \times 7^{1445}, 2+8 \times 7^{1445})$ est solution de l'équation (E).

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

4)a) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, du triangle ABC. Montrer que $\mathcal{A} = 25 \times 7^{1445}$.

b) Vérifier que $7^4 \equiv 1[100]$ et déduire que $7^{1445} \equiv 7[100]$.

c) Déterminer alors le chiffre des unités et celui des dizaines de $\mathcal{A}$.

Exercice N°3 :(5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 23 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 20 & -22 & 2 \\ -17 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que la matrice A est inversible. On notera A^{-1} la matrice inverse de A.

b) Montrer que $A \times B = -18 I_3$.

c) Déterminer alors la matrice A^{-1} .

2) On considère le système (S) :
$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 3x + y + z = 23 \\ 23x + 2y + z = 115 \end{cases}$$
, où x, y et z sont des réels.

a) En utilisant l'écriture matricielle du système (S), montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre alors le système (S).

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + bn + c, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où a, b et c sont trois réels.

On donne : $u_1 = 3$, $u_2 = 23$ et $u_3 = 115$.

a) Montrer que le triplet (a, b, c) est la solution du système (S).

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 12n - 1$.

4) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 4n + 1$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 4^n - 4n - 1$.

Exercice N°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x \ln x + e^{1-x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) a) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln x - e^{1-x} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{f(x) - e}{x}$.

c) Etudier alors la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction dérivée f' de la fonction f .

La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement au point $P(1,0)$ et passe par le point $Q(\alpha, 2)$, où α un réel.

En utilisant le graphique :

a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) Justifier que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est la seule tangente horizontale à $(\mathcal{C})$.

5) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

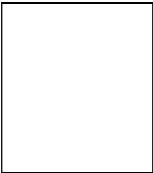
6) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln x - e^{1-x}$.

b) Dédire que $e^{1-\alpha} = \ln(\alpha) - 1$.

c) Soit A l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

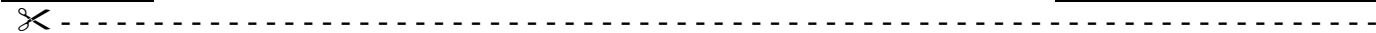
Montrer que $A = (\alpha + 1)\ln(\alpha) - 2$.

d) Déterminer alors A' l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et le segment $[PQ]$.



Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

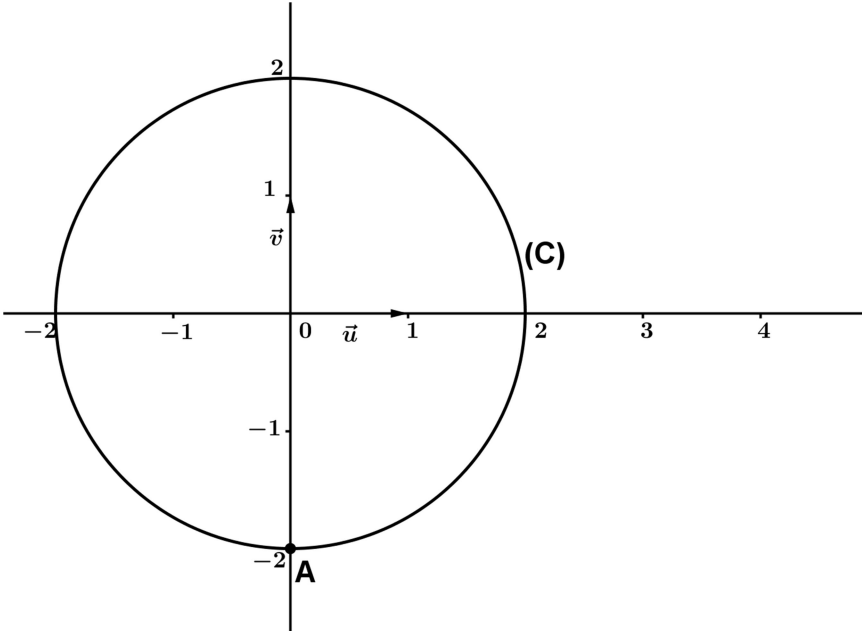


Figure 2

