

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session principale
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences de l'informatique
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3

N° d'inscription



Le sujet comporte 4 pages, la page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points):

- 1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** : $z^2 - (4 - 3i)z + 1 - 7i = 0$.
- a) Vérifier que $(2 + i)^2 = 3 + 4i$.
- b) Résoudre **(E)**.
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points **A**, **B** et **C** d'affixes respectives $z_A = 3 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = 1 + 3i$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BC]$.

- a) Calculer $(z_A - z_B)(z_A - z_C)$.
- b) En déduire que **A** appartient à $(\mathcal{C})$.

Dans la suite de l'exercice, **M** désigne un point du cercle $(\mathcal{C})$ différent de **B** et **C**.

- 3) On pose : $z_M = x + iy$ avec x et y deux réels.

On note Ω le centre de $(\mathcal{C})$.

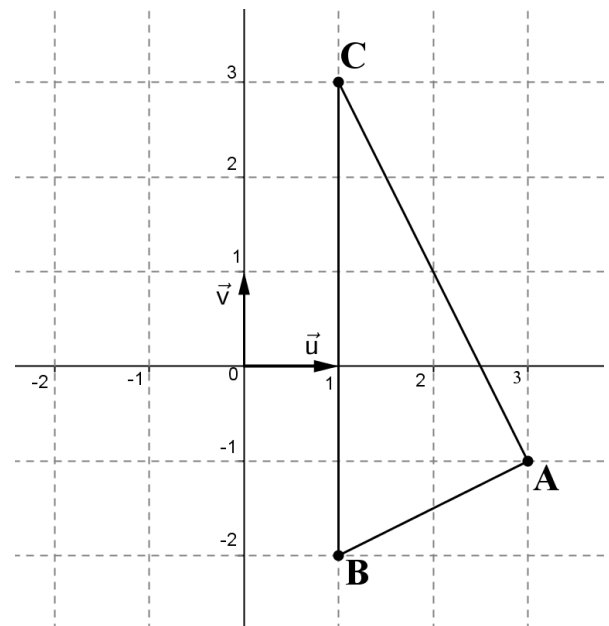
- a) Vérifier que $z_\Omega = 1 + \frac{1}{2}i$ et calculer ΩA .
- b) Montrer que $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

- 4) Soit **H** le projeté orthogonal du point **M** sur la droite (BC) et on désigne par S l'aire du triangle **MBC**.

- a) Justifier que $z_H = 1 + iy$.

- b) Montrer que $S = \frac{5}{2} |x - 1|$.

- c) Déterminer les affixes des points **M** pour lesquels $S = 5$.



 Exercice 2 (5 points):

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}_x\mathbb{Z}$ l'équation $(E') : 3x - 4y = 7$.
- a) Vérifier que $(1, -1)$ est une solution de (E') .
- b) Déterminer les couples (x, y) de $\mathbb{Z}_x\mathbb{Z}$ solutions de (E') .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les nombres $a_n = 4n^2 + 8n - 3$ et $b_n = 3n^2 + 6n - 4$.
- On pose $d_n = \text{PGCD}(a_n, b_n)$.
- a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4(n^2 + 2n - 1) + 1$ et $b_n = 3(n^2 + 2n - 1) - 1$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a_n, b_n) est une solution de (E') .
- b) Montrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 7$.
- 3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n = (n + 1)^2$ et justifier que d_n divise $(n + 1)^2$.
- b) Recopier et compléter le tableau suivant.

Reste de la division euclidienne de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par 7							

- 4) a) Montrer que si $d_n = 7$ alors $n \equiv 6[7]$.
- b) Montrer que si $n \equiv 6[7]$ alors a_n et b_n sont divisibles par 7.
- c) Déterminer d_n suivant les valeurs de n .

 Exercice 3 (4 points):

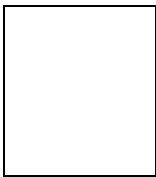
On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = e^{-n}U_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N}.$$

- 1) a) Calculer U_1 et U_2 .
- b) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.
- c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} \leq 1$ et montrer que (U_n) est décroissante.
- d) Montrer que la suite (U_n) est convergente.
- 2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n)$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = -n$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{-n(n-1)}{2}$.
- 3) a) Donner l'expression de U_n en fonction de n .
- b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

 Exercice 4 (6 points):

On donne dans l'annexe jointe, la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - 1$.

- 1) En utilisant le graphique, déterminer $g(-\ln 2)$ et donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- 2) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x(e^x - 1)$ et on note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
 - b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.
- 3)
 - a) Montrer que $f'(x) = 2e^x g(x)$ pour tout réel x .
 - b) Vérifier que $f(-\ln 2) = -\frac{1}{2}$ et donner le tableau de variation de f .
- 4)
 - a) Montrer que $f(x) - g(x) = 2 \left[(e^x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right]$ pour tout réel x et en déduire que (C) et (Γ) se coupent aux points : $A(\ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$ et $B(\ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$.
 - b) Déterminer $f(0)$ et donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.
 - c) Tracer la courbe (Γ) .
- 5) Soit I l'aire du domaine D du plan limité par la courbe (Γ) , l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.
 - a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - g'(x))$ pour tout réel x .
 - b) Montrer que $I = \frac{1}{4}$.
 - c) Pour tout réel $\alpha < -\ln 2$, on note I_α l'aire du domaine D_α du plan limité par la courbe (Γ) , l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -\ln 2$.
Montrer que $I_\alpha = \frac{1}{2}(f(\alpha) - g(\alpha)) + \frac{1}{4}$.
 - d) En déduire que $I_\alpha = I$ si et seulement si $\alpha = \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.
 - e) Hachurer les domaines D et D_α pour $\alpha = \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2022)
Annexe à rendre avec la copie

