

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	Session principale	
	<i>Epreuve :</i> Mathématiques	Section : Sciences de l'informatique
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve : 3

Le sujet comporte 4 pages, la page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

- 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - (1+i)z + i = 0$$

- 2) a) Montrer que pour tout z non nul, $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$.

- b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = i$

- 3) On considère le polynôme $P(z) = z^4 - (1+i)z^3 + (2+i)z^2 - (1+i)z + 1$

- a) Vérifier, que pour tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+i)\left(z + \frac{1}{z}\right) + i$$

- b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, en posant $Z = z + \frac{1}{z}$, l'équation $P(z) = 0$

Exercice 2 (4 points)

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = I_3 + A \text{ où } I_3 \text{ désigne la matrice unité d'ordre 3.}$$

- 1) Montrer que $A^2 = 3A$.

- 2) a) En développant, calculer les produits $(4I_3 - A) \times B$ et $B \times (4I_3 - A)$.

- b) En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1} .

3) on considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \text{ où } x, y \text{ et } z \text{ sont des nombres réels}$$

- a) Écrire (S) sous la forme matricielle.
- b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 3 (6 points)

On considère les deux suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 5 \text{ et } x_{n+1} = 3x_n - 2$$

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 3y_n + 8$$

- 1) On définit la suite (u_n) , par $u_n = x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) En déduire que pour tout entier naturel n , $x_n = 4 \times 3^n + 1$.
- 2)
 - a) Montrer que $\text{PGCD}(x_n, x_{n+1})$ divise 2.
 - b) En déduire que $\text{PGCD}(x_n, x_{n+1}) = 1$.
- 3)
 - a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $5x_n - 4y_n = 21$.
 - b) En déduire l'expression de y_n en fonction de n .
 - c) Déterminer les valeurs possibles du $\text{PGCD}(x_n, y_n)$.
- 4)
 - a) Donner, selon les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - b) Montrer que si $n \equiv 5[6]$ alors $\text{PGCD}(x_n, y_n) = 7$.
 - c) Déterminer $\text{PGCD}(x_{2018}, y_{2018})$.

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{\frac{-x}{n}}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1) a) dresser le tableau des variations de f_n .
b) Vérifier que toutes les courbes C_n passent par le point $J(0, 1)$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la position relative de C_n et C_{n+1} sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.
- 2) Dans la figure en annexe, on a construit les courbes C_1 et C_3 ainsi que la droite $\Delta: y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
a) Recopier puis compléter les phrases suivantes :
 - « la courbe tracée en trait interrompu est celle de »
 - « la courbe tracée en trait continue est celle de »
b) Tracer alors dans le même repère la courbe C_2 de la fonction f_2 .
- 3) On considère la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - x$
a) Étudier les variations de g_n .
b) Montrer qu'il existe un seul réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
c) Vérifier que x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n de f_n et la droite Δ .
d) Placer x_1 , x_2 et x_3 sur l'axe des abscisses.
- 4) a) Montrer que $g_{n+1}(x_n) = e^{\frac{-x_n}{n+1}} - e^{\frac{-x_n}{n}}$
b) En déduire que $g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$, puis conclure que (x_n) est croissante.
c) Déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

X

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Sciences de l'informatique** -Session principale - **2018**
Annexe à rendre avec la copie

