

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
(La page 4/4 est à rendre avec la copie)**

Exercice 1 (5 points)

1) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 20 & -7 \\ 5 & 4 & -7 \\ -9 & 4 & -21 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible.

b) Montrer que $A \times B = -56 I_3$ et déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

2) On considère le système (S) suivant :
$$\begin{cases} x - 7y + 2z = 0 \\ -3x + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$
 où x, y et z des réels.

a) Donner l'écriture matricielle de (S).

b) Résoudre alors le système (S) dans $\mathbb{R}^3$.

3) Pour tout nombre complexe z, on considère :

$P(z) = az^3 + (-2b + ia)z^2 - (5b + 4ia)z + c(2 + i)$ où a, b et c des réels et tels que

$P(1) = 0$ et $\operatorname{Re}[P(-1)] = 8$, avec $\operatorname{Re}[P(-1)]$ désigne la partie réelle de $P(-1)$.

a) Montrer que $P(1) = (a - 7b + 2c) + i(-3a + c)$ et $P(-1) = (-a + 3b + 2c) + i(5a + c)$.

b) Montrer
$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ \operatorname{Re}[P(-1)] = 8 \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} a - 7b + 2c = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 8 \end{cases}$$

c) Déduire que $P(z) = z^3 + (-2 + i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(2 + i)$.

Exercice 2 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $3x - 7y = 11$.

a) Vérifier que le couple (6,1) est une solution de (E).

b) Montrer que l'ensemble des couples (x,y) solutions de l'équation (E) est

$$\{(6 + 7k, 1 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E'): $3x^2 - 7y = 11$.

a) Montrer que :

(x,y) est solution de (E') si et seulement si (x^2, y) est solution de (E).

b) En déduire que si (x, y) est solution de (E') alors $x^2 \equiv 6[7]$.

3)

a) Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $x \in \mathbb{Z}$.

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de x^2 par 7					2		

b) Dédurre que (E') n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 3 (4 points)

Un ver informatique est un programme malveillant et autonome qui se propage très rapidement via les réseaux informatiques ou via la connexion internet, infectant ainsi tous les serveurs et ordinateurs mal protégés.

On a relevé dans le tableau suivant, le nombre N d'ordinateurs infectés par un ver à des instants t exprimés en heures :

t (en heure)	0	1	2	3	4	5	6	7
N (nombre d'ordinateurs infectés)	2	5	12	30	100	250	800	2800

- 1) Calculer à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire r entre t et N .
- 2) Justifier que la corrélation linéaire entre t et N est faible.
- 3) On envisage un ajustement exponentiel de la série (t, N) , pour cela on pose $y = \ln(N)$.

Le tableau suivant donne en fonction de t , les valeurs de y arrondies au centième :

t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0.69	1.61	2.48	3.40	4.61	5.52	6.68	7.94

Donner l'arrondi à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire R de la série (t, y) .
Interpréter la valeur obtenue.

4) Dans cette question les résultats seront arrondis au centième.

- a) Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de y en t . (Les coefficients seront arrondis au centième)
 - b) En déduire que $N = 1,68.e^{1.03t}$.
- 5) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.
Estimer, à l'aide de cet ajustement, le nombre d'ordinateurs infectés au bout 8 heures.

Exercice 4 (7 points)

- I. Soit f la fonction définie sur $]-3, +\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\ln(x+3)$ où a et b deux nombres réels que l'on se propose de les déterminer.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et que $f'(x) = a \ln(x+3) + \frac{ax+b}{x+3}$.

- 2) Sachant que :

- $(\mathcal{C})$ passe par le point O origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- La tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -2 a pour équation $y = -2x - 4$.

- a) Montrer que $f(x) = x \ln(x+3)$.

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ et Interpréter graphiquement le résultat.

II. Dans l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- A est l'unique point d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. (on désigne par α l'abscisse du point A)
- $B(\alpha, f(\alpha))$.

- 1) Par lecture graphique :

- a) Déterminer $f'(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.
- b) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .

- 2) Dresser le tableau de variation de f .

- 3) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T .

- 4) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

- a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-2}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx$.

- b) Montrer que pour tout $x \in]-3, +\infty[$ on a $\frac{x^2}{x+3} = x - 3 + \frac{9}{x+3}$.

- c) Dédire que $\mathcal{A} = \frac{9}{2} \ln 3 - 4$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....

.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session de contrôle (2026)
Annexe à rendre avec la copie

