

|                                                                                                              |                                                                                                     |                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| REPUBLICQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>●●●●●<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br>SESSION 2018 | <b>Session de contrôle</b>                                                                          |                                                |
|                                                                                                              | <i>Epreuve :</i><br><b>Mathématiques</b>                                                            | Section :<br><b>Sciences de l'informatique</b> |
|                                                                                                              | Durée : <b>3h</b>  | Coefficient de l'épreuve : <b>3</b>            |

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

### Exercice 1 (4 points)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer  $\det A$ . En déduire que  $A$  est inversible.

2) a) Montrer que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) Vérifier que  $A^3 - A^2 = -7 \times I_3$  où  $I_3$  est la matrice unité d'ordre 3.

c) En déduire  $A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$ .

3) On considère le système (S) suivant  $\begin{cases} -x - 2y + z = 3 \\ x + y + z = 7 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$  où  $x, y$  et  $z$  sont des réels

a) Ecrire ce système sous forme matricielle.

b) Résoudre alors le système (S).

### Exercice 2 (4,5 points)

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard, successivement et avec remise,  $n$  boules de l'urne ( $n$  étant un entier supérieur ou égal à 2)

On considère les événements :

$A$  : « obtenir des boules de couleurs différentes »

$B$  : « obtenir au plus une boule blanche »

$C$  : « obtenir  $n$  boules de même couleur »

$D$  : « obtenir une seule boule blanche »

- 1) a) Montrer que  $p(C) = \frac{1}{2^{n-1}}$   
 b) Calculer  $p(D)$
- 2) a) Montrer que  $p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$   
 b) Montrer que  $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$   
 c) Vérifier que  $p(A \cap B) = p(D)$
- 3) Soit  $(u_n)$  la suite définie pour  $n \geq 2$  par :  $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$   
 a) Montrer que  $(u_n)$  est croissante.  
 b) En déduire que  $u_n$  s'annule uniquement pour  $n = 3$ .
- 4) Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$  ?

### Exercice 3 ( 5,5 points)

- 1) On considère l'équation  $(E) : 5x - 26y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.  
 a) Vérifier que  $(-5, -1)$  est une solution de  $(E)$ .  
 b) En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- 2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci-dessous

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K  | L  | M  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier  $n$  correspondant dans le tableau.
- on calcule le reste de la division euclidienne de  $5n + 2$  par 26 que l'on note  $m$ .
- à l'entier  $m$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- a) Vérifier que la lettre F est « codée » B.  
 b) Coder le mot BAC, sachant que le codage s'effectue "lettre par lettre" et dans l'ordre.
- 3) a) Montrer que pour tous entiers  $n$  et  $m$ , on a :
- $$5n + 2 \equiv m[26] \Leftrightarrow n \equiv 21m + 10[26]$$
- b) En déduire un procédé permettant de reconnaître une lettre « codée »  
 c) Reconnaître le mot dont le code est « UA ».

#### Exercice 4 ( 6 points)

- 1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .
  - a) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ .  
 b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .  
 c) Montrer que la restriction de  $f$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$  sur  $[e, +\infty[$ . On note  $f^{-1}$  sa réciproque.
- 3) Tracer les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 4) On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ 
  - a) Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq e$
  - b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- 5) a) Montrer que pour tout  $x \geq e$ ,  $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^2$   
 b) En déduire que pour tout  $x \geq e$ ,  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$
- 6) a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|$$
  
 b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$   
 c) Retrouver ainsi la limite de la suite  $(u_n)$ .