

Exercice 1

1 a $(3 - 3i)^2 = 9 - 18i - 9 = -18i$ (0,25).

b $(E) : z^2 - 5(1 + i)z + 17i = 0$
 $a = 1, b = -5(1 + i)$ et $c = 17i$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 \times 2i - 4 \times 17i = 50i - 68i = -18i = (3 - 3i)^2 = \delta^2$ (0,25)

Donc $\delta = 3 - 3i$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{5 + 5i + 3 - 3i}{2} = \frac{8 + 2i}{2} = 4 + i \\ z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{5 + 5i - 3 + 3i}{2} = \frac{2 + 8i}{2} = 1 + 4i \end{cases} \quad (0,5)$$

$S_{\mathbb{C}} = \{4 + i; 1 + 4i\}$

2 a $z_A = i \Rightarrow A(0, 1)$
 $z_B = 1 + 4i \Rightarrow B(1, 4)$
 $z_C = 4 + i \Rightarrow C(4, 1)$
 $z_H = 1 + 2i \Rightarrow H(1, 2)$

b $\text{Ré}(z_B) = \text{Ré}(z_H)$ donc $(BH) \parallel (O\vec{u})$ et $\text{Im}(z_A) = \text{Im}(z_C)$ donc $(AC) \parallel (O\vec{v})$ (0,25)
 Or $(O\vec{u}) \perp (O\vec{v})$ donc $(AC) \perp (BH)$ (0,25) en un point J tel que $z_J = \text{Ré}(z_B) + \text{Im}(z_A)i = 1 + i$

Donc les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires en un point J tels que $z_J = 1 + i$ (0,25)

c $(z_H - z_A)(\overline{z_C - z_B}) = (1 + 2i - i)(\overline{4 + i - 1 - 4i}) = (1 + i)(3 + 3i) = 3 + 3i + 3i - 3 = 6i$ (0,5).

d On a $(z_H - z_A)(\overline{z_C - z_B}) = 6i$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc $(AH) \perp (BC)$
 Dans le triangle ABC on a les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires donc (BH) la hauteur issue de B et $(AH) \perp (BC)$ donc (AH) la hauteur issue de A Donc H est l'orthocentre du triangle ABC . (0,5)

3 a $S = \frac{BJ \times AC}{2} = \frac{|z_J - z_B| \times |z_C - z_A|}{2} = \frac{|1 + i - 1 - 4i| \times |4 + i - i|}{2}$
 $= \frac{|-3i| \times |4|}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (0,25)

b On a H est l'orthocentre du triangle ABC donc $(CK) \perp (AB)$
 Donc $S = \frac{AB \times CK}{2} \Rightarrow \frac{AB \times CK}{2} = 8 \Rightarrow CK = \frac{16}{AB}$
 $\Rightarrow CK = \frac{16}{|z_B - z_A|} \Rightarrow CK = \frac{16}{|1 + 4i - i|}$
 $\Rightarrow CK = \frac{16}{|1 + 3i|} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8}{5}\sqrt{10}$ (0,5).

c $z_{\overrightarrow{CH}} = z_H - z_C = 1 + 2i - 4 - i = -3 + i$ (0,25)
 $CH = |-3 + i| = \sqrt{10}$ et on a $CK = \frac{8}{5}\sqrt{10}$ donc $CK = \frac{8}{5}CH$ (0,25).

d On a $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires de même sens donc $\overrightarrow{CK} = \frac{8}{5}\overrightarrow{CH}$ (0,25)
 Donc $z_{\overrightarrow{CK}} = \frac{8}{5}z_{\overrightarrow{CH}}$ donc $z_K - z_C = \frac{8}{5}(z_H - z_C)$

$$\text{Donc } z_K = \frac{6}{5}(z_H - z_C) + z_C = \frac{6}{5}(1 + 2i - 4 - i) + 4 + i = \frac{-18}{5} + \frac{6}{5}i + 4 + i = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$$

$$\text{Donc l'affixe de } K \text{ est } z_K = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i \quad (0,25)$$

Exercice 2

1 Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a + b = 2339$.

a $d = \text{PGCD}(a, b)$ donc $\begin{cases} d \text{ divise } a \\ d \text{ divise } b \end{cases}$ donc d divise $a + b$ donc d divise 2339

Or 2339 est un nombre premier donc $d = 1$ ou $d = 2339$

$a < d$ et d divise a donc $d = 1$ (0,75)

b On a $314 + 2025 = 2339$ donc 314 et 2025 sont premiers entre eux. (0,5)

2 une solution de (E).

a On a $2025 = 314 \times 6 + 141$ donc $2025 \equiv 141[314]$ (0,5).

b (x, y) une solution de (E) donc $2025x - 314y = 1$ donc $2025x = 314y + 1$
donc $2025x \equiv 1[314]$ or $2025 \equiv 141[314]$ donc $2025x \equiv 141x[314]$ donc
 $141x \equiv 1[314]$.

On a $141x \equiv 1[314]$ donc $49 \times 141x \equiv 49[314]$ donc $6909x \equiv 49[314]$ (1).

c $6909 = 314 \times 22 + 1$ donc $6909 \equiv 1[314]$

On a $6909x \equiv 49[314]$ donc $(314 \times 22 + 1)x \equiv 49[314]$ donc $x \equiv 49[314]$ (0,75)

3 $x \equiv 49[314]$ donc $x = 314k + 49$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On a $2025x - 314y = 1$ donc $2025(314k + 49) - 314y = 1$ donc $2025(314k + 49) - 1 = 314y$
donc $y = \frac{2025 \times 314k + 99224}{314} = 2025k + 316$

Réciproquement

$$2025(314k + 49) - 314(2025k + 316) = 2025 \times 314k + 2025 \times 49 - 314 \times 2025k + 314 \times 316 = 99225 - 99224 = 1$$

Donc $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(314k + 49; 2025k + 316); k \in \mathbb{Z}\}$ (1)

Exercice 3

1 $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 1$ (0,5)

$\det(A) = 1 \neq 0$ donc A est inversible. (0,25)

2 a $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ (0,75).

b $A \times B = I_3 \iff A^{-1} = B$ (0,5)

$$3 \quad a \quad \begin{cases} 3x + y + 4z = 40,6 \\ x + 2y + 2z = 29,2 \\ 3x + 3y + 5z = 60,2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix}$$

$$\iff B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix} \quad (0,5).$$

$$b \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40,6 \\ 29,2 \\ 60,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 7,8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(5,6; 7,8; 4)\} \quad (0,75)$$

4 a Soit

x le prix d'un cahier C_1

y le prix d'un cahier C_2

z le prix d'un cahier C_3

E_1 achète 3 de type C_1 et 1 de type C_2 et 4 de type C_3 avec montant 40,6 donc $3x + y + 4z = 40,6$

E_2 achète 2 de type C_1 et 4 de type C_2 et 4 de type C_3 avec montant 58,4 donc $2x + 4y + 4z = 58,4$ donc $x + 2y + 2z = 29,2$

E_3 achète 3 de type C_1 et 3 de type C_2 et 5 de type C_3 avec montant 60,2 donc $3x + 3y + 5z = 60,2$

donc $\begin{cases} 3x + y + 4z = 40,6 \\ x + 2y + 2z = 29,2 \\ 3x + 3y + 5z = 60,2 \end{cases} \quad (0,75)$

b Le prix d'un cahier C_1 est 5,6

Le prix d'un cahier C_2 est 7,8

Le prix d'un cahier C_3 est 4 $(0,5)$

Exercice 4

1 Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - x - \ln x$.

a $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x} - x - \ln x = +\infty \quad (0,25)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - x - \ln x = -\infty \quad (0,25)$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b g est dérivable sur $]0, +\infty[$

pour tout $x \in]0, +\infty[$ $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x} = -(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}) < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. (0,5)

c g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. donc g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Or $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(1,3) = 0,21$ et $g(1,4) = -0,02$ donc $g(1,3) \times g(1,4) < 0$ donc $\alpha \in]1,3; 1,4[$ (0,5)

d

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(0,25)

2 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x + \ln x)e^{-x}$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x)e^{-x} = -\infty$ (0,25) car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. (0,25)

b Pour tout $x > 0$, $f(x) = (x + \ln x)e^{-x} = \frac{x + \ln x}{e^x} = \frac{\frac{x + \ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}$ (0,25).

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (0,25)

La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (0,25)

3 a f est dérivable sur $]0, +\infty[$

pour tout $x > 0$, $f'(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{-x} - e^{-x}(x + \ln x) = e^{-x}(1 + \frac{1}{x} - x - \ln x) =$

$e^{-x}g(x)$ (0,25).

b

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$f(\alpha)$	0

(0,5)

4 a $f(\alpha) = (\alpha + \ln \alpha)e^{-\alpha}$

$\alpha \in]1,4; 1,4[$ donc $\alpha > 1$ donc $\ln \alpha > 0$ alors $(\alpha + \ln \alpha) > 0$

Donc $f(\alpha) > 0$ (0,25)

b f est continue et strictement croissante sur $]0, \alpha]$ donc f réalise une bijection de $]0, \alpha]$ sur $] -\infty, f(\alpha)]$ Or $0 \in] -\infty, f(\alpha)]$ donc $f(x) = 0$ admet dans $]0, \alpha]$ une unique solution.

f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$ donc f réalise une bijection de

$] \alpha, +\infty[$ sur $]0, f(\alpha)[$ Or $0 \notin]0, f(\alpha)[$ donc $f(x) = 0$ n' admet pas dans $] \alpha, +\infty[$ une solution.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution β . (0,5)

c $f(\beta) = 0$ donc $(\beta + \ln \beta)e^{-\beta} = 0$ donc $(\beta + \ln \beta) = 0$ car $e^{-\beta} \neq 0$ donc $\ln(\beta) = -\beta$ (0,25).

d $f'(\beta) = e^{-\beta}(1 + \frac{1}{\beta} - \beta - \ln \beta) = e^{-\beta}(1 + \frac{1}{\beta} - \beta + \beta)$
 $= e^{-\beta}(1 + \frac{1}{\beta}) = e^{\ln \beta}(1 + \frac{1}{\beta}) = \beta(1 + \frac{1}{\beta}) = 1 + \beta$ (0,5).

5 Dans l'annexe jointe (figure 2) on a placé les points A et B de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives α et β et on a représenté le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \beta \end{pmatrix}$.

Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B

Donc $T : y = f'(\beta)(x - \beta) + f(\beta) = (1 + \beta)(x - \beta) + 0 = (1 + \beta)(x - \beta)$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T

Figure 1

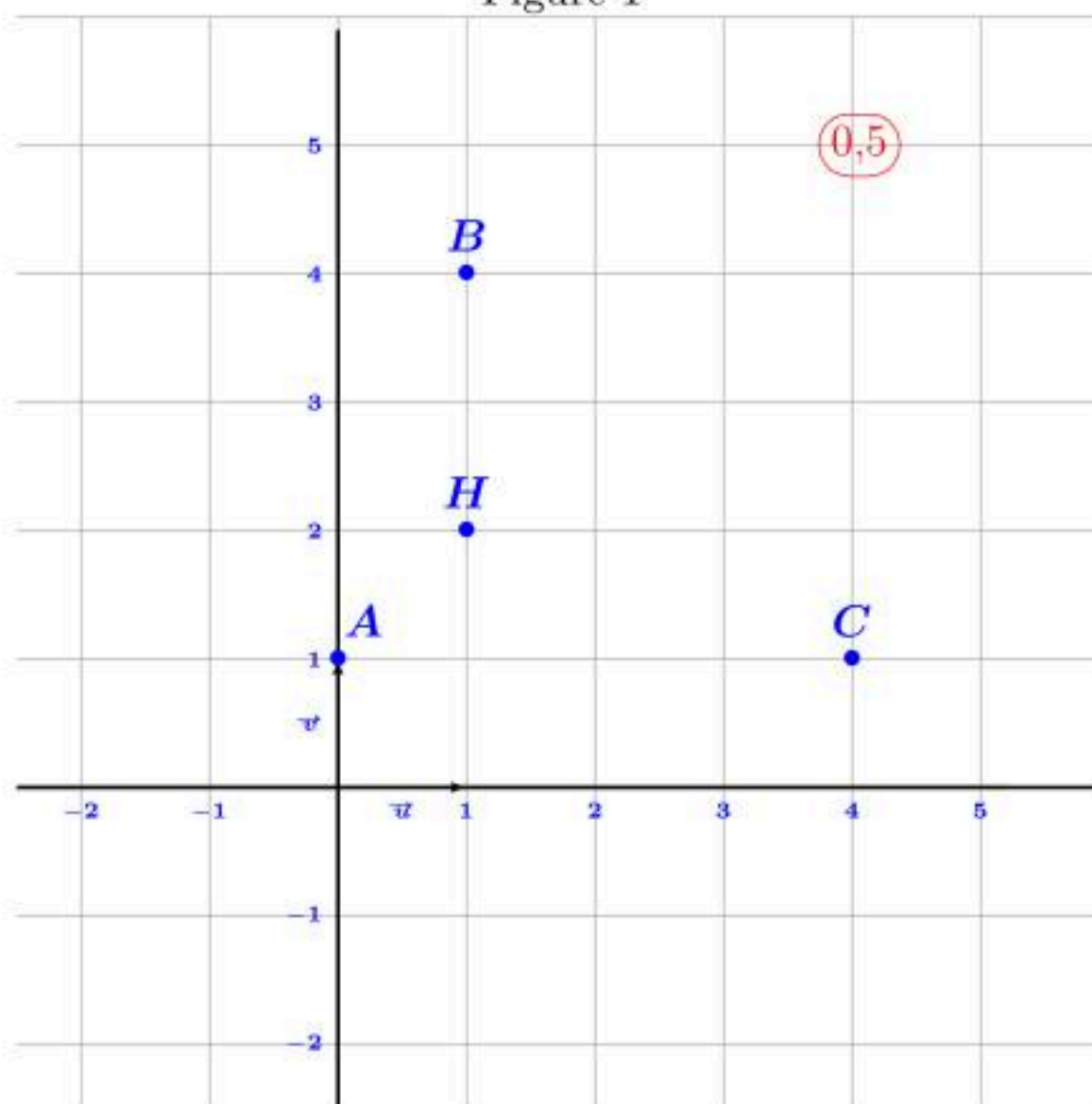


Figure 2

