

Exercice 1 (5 points)

- 1 a Nous avons l'équation quadratique $z^2 - 2iz - 4 = 0$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = -4 - (-16) = 12$$

Les racines de l'équation sont donc :

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = i \pm \sqrt{3}$$

Ainsi, les solutions sont $z_1 = i + \sqrt{3}$ et $z_2 = i - \sqrt{3}$.

- 2 a $(z + 2i)(z^2 - 2iz - 4) = z(z^2 - 2iz - 4) + 2i(z^2 - 2iz - 4) = z^3 - 2iz^2 - 4z + 2iz^2 - 4i = z^3 - 4z - 8i$
Nous avons bien $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)$.

- b Nous avons $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)$. Les solutions de $z^2 - 2iz - 4 = 0$ sont $z_1 = i + \sqrt{3}$ et $z_2 = i - \sqrt{3}$.

Donc, les solutions de $z^3 = 8i$ sont $z_1 = i + \sqrt{3}$, $z_2 = i - \sqrt{3}$, et $z_3 = -2i$.

- 3 a Le cercle (C) de centre O et de rayon $|z_A| = 2 = OA$. Calculons $|z_B|$ et $|z_D|$:

$$|z_B| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_D| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

Donc, B et D appartiennent au cercle (C) .

- b Voir Figure 1.

c

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + i + 2i| = |\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AD = |z_D - z_A| = |-\sqrt{3} + i + 2i| = |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BD = |z_B - z_D| = |\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

Les trois côtés du triangle ABD sont égaux à $2\sqrt{3}$, donc le triangle ABD est équilatéral.

- 4 a La tangente à (C) en A a pour équation $y = -2$. La tangente à (C) en B a pour équation $y = ax + b$. Le point E est l'intersection de ces deux tangentes. $E \in T_1$, signifie $y_E = -2$, par suite $z_E = x - 2i$.

- b $z_E - z_B = x - 2i - (\sqrt{3} + i) = x - \sqrt{3} - 3i$ et $\overline{z_B} = \sqrt{3} - i$

$$(z_E - z_B)\overline{z_B} = (x - \sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - i) = x\sqrt{3} - xi - 3\sqrt{3} + 3i - 3 = x\sqrt{3} - 6 - i(x + 2\sqrt{3})$$

- c $(OB) \perp T_2$ donc $(OB) \perp (EB)$ en B d'où $(z_E - z_B)\overline{z_B} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Re}((z_E - z_B)\overline{z_B}) = 0$

Ainsi,

$$x\sqrt{3} - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Donc, $z_E = 2\sqrt{3} - 2i$

- 5 a $Z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = 2\sqrt{3}$ et $Z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3} = Z_{\overrightarrow{AE}}$ donc le quadrilatère $AEBD$ est un parallélogramme.

Comme $|z_B - z_D| = |z_D - z_A| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow BD = AD$. Ainsi $AEBD$ est un losange.

- b $|z_A - z_B| = |z_B - z_D| = 2\sqrt{3}$ et $|z_E - z_D| = |3\sqrt{3} - 3i| = 6$

L'aire du losange est donc : Aire = $\frac{1}{2} \times AB \times ED = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3}$

Exercice 2 (4 points)

- 1 a Vérification que le couple (3,2) est une solution :

$$4 \times 3 - 3 \times 2 = 12 - 6 = 6$$

Donc, (3,2) est bien une solution de l'équation (E).

- b Pour résoudre l'équation diophantienne $4x - 3y = 6$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nous utilisons la méthode suivante :

On commence par vérifier qu'un couple (x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation. Nous avons déjà vérifié que (3,2) est une solution.

Ensuite, nous déterminons la solution générale de l'équation :

Soit (x, y) une solution quelconque de $4x - 3y = 6$. Alors :

$$4x - 3y = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2$$

$$4(x - 3) = 3(y - 2)$$

$$4(x - 3) = 3(y - 2) \quad (*)$$

$$4 \mid 3(y - 2)$$

Étant donné que $\text{PGCD}(4, 3) = 1$, il s'ensuit que $4 \mid (y - 2)$ d'après le lemme de Gauss. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 2 = 4k$, ce qui implique que $y = 2 + 4k$.

Remplaçons cette valeur dans (*) :

$$4(x - 3) = 3(4k)$$

$$x - 3 = 3k$$

$$x = 3 + 3k$$

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$4(3 + 3k) - 3(2 + 4k) = 12 + 12k - 6 - 12k = 6$$

Donc, les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E) sont : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3 + 3k, 2 + 4k); k \in \mathbb{Z}\}$

- 2 Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sous forme de matrices colonnes :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} &= (x-3) \cdot 4 + (y-2) \cdot (-3) \\ &= 4x - 12 - 3y + 6 = 4x - 3y - 6 \end{aligned}$$

Pour que les vecteurs soient orthogonaux, il faut que :

$$4x - 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3y = 6$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si et seulement si (x, y) est solution de l'équation (E).

- 3 a $4(3 + 6 \times 7^{1445}) - 3(2 + 8 \times 7^{1445}) = 12 + 24 \times 7^{1445} - 6 - 24 \times 7^{1445} = 6$

Le couple $(3 + 6 \times 7^{1445}, 2 + 8 \times 7^{1445})$ est donc bien solution de l'équation (E).

- b Pour montrer que le triangle ABC est rectangle en A , nous devons vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Calculons ces vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3+6 \times 7^{1445} - 3 \\ 2+8 \times 7^{1445} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 7^{1445} \\ 8 \times 7^{1445} \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \times 7^{1445} \\ 8 \times 7^{1445} \end{pmatrix} = 4 \cdot (6 \times 7^{1445}) + (-3) \cdot (8 \times 7^{1445}) \\ &= 24 \times 7^{1445} - 24 \times 7^{1445} = 0 \end{aligned}$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, et le triangle ABC est rectangle en A .

ou bien Comme Le couple $(3+6 \times 7^{1445}, 2+8 \times 7^{1445})$ est une solution de l'équation (E) 2), donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, par suite le triangle ABC est rectangle en A .

4 a $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + (-3)^2} \times \sqrt{(6 \times 7^{1445})^2 + (8 \times 7^{1445})^2}$

$$AB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$AC = 7^{1445} \sqrt{6^2 + 8^2} = 7^{1445} \times 10 = 10 \times 7^{1445}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times 7^{1445} = 25 \times 7^{1445}$$

b

$$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$$

Donc, $7^{1445} = (7^4)^{361} \times 7 = 1^{361} \times 7 \equiv 7 \pmod{100}$.

c

$$\mathcal{A} = 25 \times 7^{1445} \equiv 25 \times 7 \pmod{100} = 175 \equiv 75 \pmod{100}$$

Donc, le chiffre des unités est 5 et celui des dizaines est 7.

Exercice 3 (5 points)

1 a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 23 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 23 & 2 \end{vmatrix} = -18$ Comme

$\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible.

b $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 23 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 20 & -22 & 2 \\ -17 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = -18I_3$

Ainsi, $A \times B = -18I_3$.

c Nous savons que $A \times B = -18I_3$, donc : $A^{-1} = \frac{1}{-18}B = -\frac{1}{18}B$

Ainsi, la matrice inverse de A est :

$$A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 20 & -22 & 2 \\ -17 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{2}{18} & \frac{1}{18} \\ -\frac{20}{18} & \frac{22}{18} & -\frac{2}{18} \\ \frac{17}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

2 a Le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix}$

En multipliant par A^{-1} , nous obtenons : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix}$

b Calculons : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{2}{18} & \frac{1}{18} \\ -\frac{20}{18} & \frac{22}{18} & -\frac{2}{18} \\ \frac{17}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \\ 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{72}{18} \\ \frac{216}{18} \\ \frac{-18}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc, les solutions du système sont $x = 4, y = 12$ et $z = -1$.

3 a Nous avons les valeurs de u_n suivantes : $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 23, u_3 = 115$.
En utilisant la relation de récurrence, nous obtenons :

$$u_1 = au_0 + b \cdot 0 + c \implies 3 = a \cdot 1 + c \implies a + c = 3$$

$$u_2 = au_1 + b \cdot 1 + c \implies 23 = a \cdot 3 + b \cdot 1 + c \implies 3a + b + c = 23$$

$$u_3 = au_2 + b \cdot 2 + c \implies 115 = a \cdot 23 + b \cdot 2 + c \implies 23a + 2b + c = 115$$

Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ 3a + b + c = 23 \\ 23a + 2b + c = 115 \end{cases}$$

Nous retrouvons exactement le même système (S) . Ainsi, le triplet (a, b, c) est bien la solution du système (S) .

b Nous avons trouvé les valeurs $a = 4, b = 12$ et $c = -1$. Donc la relation de récurrence devient :

$$u_{n+1} = 4u_n + 12n - 1$$

4 a Nous avons : $v_{n+1} = u_{n+1} + 4(n+1) + 1 = 4u_n + 12n - 1 + 4n + 4 + 1 = 4(u_n + 4n + 1) = 4v_n$
Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 4.

b Puisque v_n est géométrique de raison 4, nous avons :

$$v_n = v_0 \cdot 4^n = (u_0 + 0 + 1) \cdot 4^n = 2 \cdot 4^n$$

Donc,

$$u_n = v_n - 4n - 1 = 2 \cdot 4^n - 4n - 1$$

Exercice 4 (6 points)

1 Pour montrer que f est continue à droite en 0, nous devons vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + e^{1-x})$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1-x} = e$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + e = e = f(0)$. Par conséquent, f est continue à droite en 0.

2 a La fonction $f(x) = x \ln x + e^{1-x}$ est une somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$: $x \ln x$ et e^{1-x} . Donc, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

b Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{f(x) - e}{x} = \frac{x \ln x + e^{1-x} - e}{x} = \ln x + \frac{e^{1-x} - e}{x}$$

Simplifions $\frac{e^{1-x} - e}{x}$:

$$\frac{e^{1-x} - e}{x} = e^{1-x} \cdot \frac{1 - e^x}{x} = -e^{1-x} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

Donc,

$$\frac{f(x) - e}{x} = \ln x - e^{1-x} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

c $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - e}{x}$

Or, nous avons montré que

$$\frac{f(x) - e}{x} = \ln x - e^{1-x} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - e^{1-x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{1-x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = -\infty + 0 = -\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0.

Graphiquement, cela signifie que (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0.

3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x + e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \\ &= +\infty + 0 = +\infty \end{aligned}$$

Pour montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, calculons :

$$\frac{f(x)}{x} = \ln x + \frac{e^{1-x}}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{e^{1-x}}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1-x}}{x} \\ &= +\infty + 0 = +\infty \end{aligned}$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe (C_f) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

4

a La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et passe par le point $(\alpha, 2)$. Pour $x < 1$, $f'(x)$ est négatif car (Γ) est sous l'axe des abscisses. Pour $x > 1$, $f'(x)$ est positif car (Γ) est au-dessus de l'axe des abscisses.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+

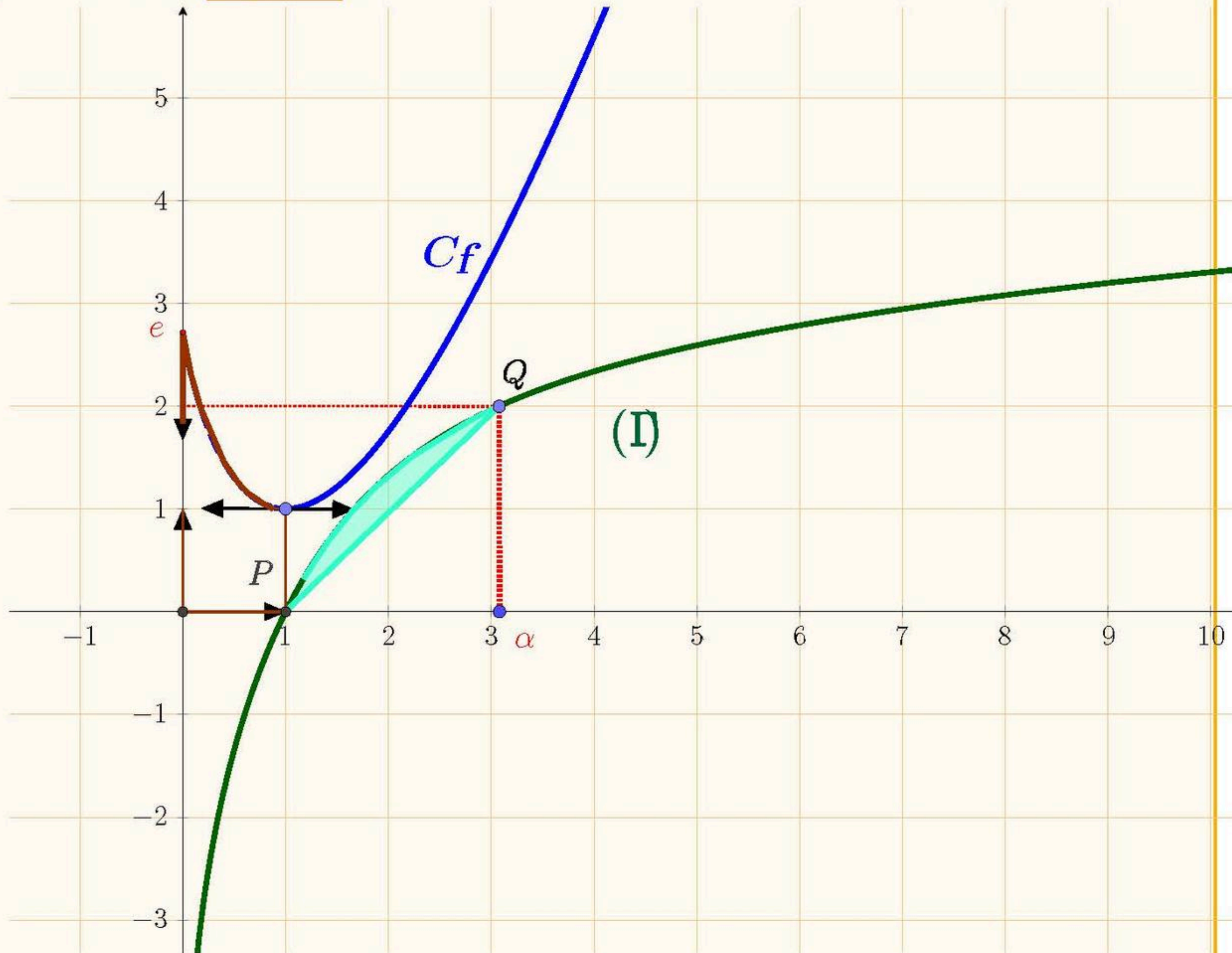
b La tangente est horizontale lorsque la dérivée est nulle. Or, (Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement en $x = 1$, donc $f'(1) = 0$. Il s'ensuit que la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1 est la seule tangente horizontale à (C_f) .

5

a En combinant les résultats précédents, nous obtenons le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	e	1	$+\infty$

b la courbe (C_f) . **Figure 2**



6 a Pour $x > 0$: $f'(x) = (x \ln x + e^{1-x})' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + (e^{1-x})' = \ln x + 1 - e^{1-x}$ Donc,

$$f'(x) = 1 + \ln x - e^{1-x}$$

b Nous savons que la courbe (Γ) passe par le point $Q(\alpha, 2)$, ce qui signifie que $f'(\alpha) = 2$.

$$f'(\alpha) = 1 + \ln \alpha - e^{1-\alpha} = 2$$

$$1 + \ln \alpha - e^{1-\alpha} = 2$$

$$\ln \alpha - e^{1-\alpha} = 1$$

Donc,

$$e^{1-\alpha} = \ln \alpha - 1$$

c L'aire A est donnée par :

$$A = \int_1^\alpha f'(x) dx = [f(x)]_1^\alpha = f(\alpha) - f(1) = \alpha \ln \alpha + \ln \alpha - 1 - 1 = (\alpha + 1) \ln \alpha - 2$$

Donc,

$$A = (\alpha + 1) \ln \alpha - 2$$

d $A' = A - A''$, ou $A'' =$ l'aire du triangle rectangle PIQ ou I est le projeté orthogonale de Q sur l'axe des abscisses donc $A' = A - \frac{(\alpha - 1) \times 2}{2} = (\alpha + 1)\ln\alpha - 2 - (\alpha - 1) = (\alpha + 1)\ln\alpha - \alpha - 1$

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

