

MATHÉMATIQUES

Section : Sciences de l'informatique

Session principale 2021

Exercice 1 :

1) a) $(3 + i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$

Donc $(3 + i)^2 = 8 + 6i$

b) $\Delta = [-(5 - 3i)]^2 - 4 \times 1 \times (2 - 9i) = (5 - 3i)^2 - 8 + 36i$
 $= 25 - 30i - 9 - 8 + 36i = 8 + 6i = (3 + i)^2$

Donc $\delta = 3 + i$ une racine carrée de Δ

D'où $Z_1 = \frac{(5-3i)-(3+i)}{2} = \frac{5-3i-3-i}{2} = \frac{5-3i+3+i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$

$$Z_2 = \frac{(5-3i)+(3+i)}{2} = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$$

Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{ 1 - 2i, 4 - i \}$

2) a) Le point C est la symétrie de A par rapport à K donc K est le milieu de [AC]

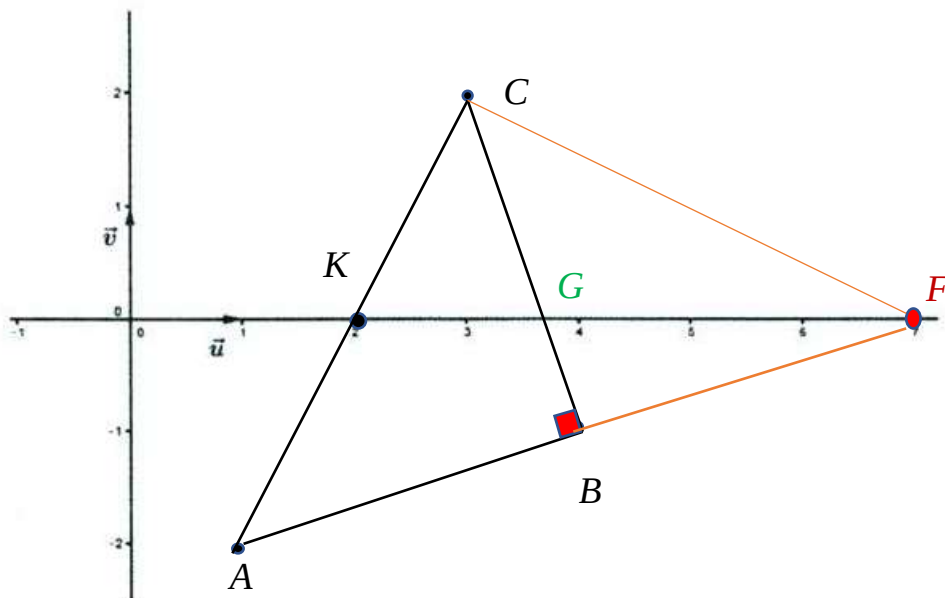
Par suite $\frac{Z_C + Z_A}{2} = Z_K$ sig $Z_C + Z_A = 2Z_K$

$$\text{Sig } Z_C = 2Z_K - Z_A = 4 - 1 + 2i = 3 + 2i$$

Ainsi $Z_C = 3 + 2i$

b)

Figure 1



$$\begin{aligned}
\text{c) } \overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_B - Z_C) &= \overline{(4 - i - 1 + 2i)} \times (4 - i - 3 - 2i) \\
&= \overline{(3 + i)} \times (1 - 3i) = (3 - i) \times (1 - 3i) \\
&= 3 - 9i - i - 3 = -10i
\end{aligned}$$

$$\text{d) } \overline{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} \times \text{Aff}(\overrightarrow{CB}) = \overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_B - Z_C) = -10i \in i\mathbb{R}^*$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux d'où ABC est triangle rectangle en B

$$AB = |Z_B - Z_A| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$CB = |Z_B - Z_C| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

Donc $AB = CB$ ainsi ABC est triangle rectangle et isocèle en B

$$\begin{aligned}
\text{3) a) } \overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_F - Z_A) &= \overline{(4 - i - 1 + 2i)} \times (\alpha - 1 + 2i) \\
&= \overline{(3 + i)} \times (\alpha - 1 + 2i) = (3 - i) \times (\alpha - 1 + 2i) \\
&= 3\alpha - 3 + 6i - \alpha i + i + 2 = 3\alpha - 1 + 7i - \alpha i \\
&= 3\alpha - 1 + (7 - \alpha)i
\end{aligned}$$

b) Le point F appartient à la droite (AB) alors A, B et F sont alignés

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires

Donc $\overline{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} \times \text{Aff}(\overrightarrow{CB})$ est réel

Donc la partie imaginaire du produit $\overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_F - Z_A)$ est nulle

$$\text{D'où } 7 - \alpha = 0 \quad \text{sig } \alpha = 7$$

$$\text{c) } \frac{Z_A + Z_F}{2} = \frac{1 - 2i + 7}{2} = \frac{8 - 2i}{2} = 4 - i = Z_B$$

Donc B est le milieu du segment [AF]

d) Dans le triangle AFC on a : B est le milieu de [AF] et K est le milieu de [AC], or G le point d'intersection des droites (FK) et (BC) donc G est le centre de gravité du triangle AFC

$$\text{Donc } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \quad \text{sig } Z_A - Z_G + Z_F - Z_G + Z_C - Z_G = 0$$

$$\text{sig } Z_A + Z_F + Z_C = 3 Z_G$$

$$\text{sig } Z_G = \frac{Z_A + Z_F + Z_C}{3} = \frac{1 - 2i + 7 + 3 + 2i}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Ainsi } Z_G = \frac{11}{3}$$

Exercice 2 :

1) a) On a : $U_0 = 0$ alors $0 \leq U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \leq U_n < 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 1$

On a : $U_n \geq 0 \Rightarrow 3U_n \geq 0 \Rightarrow 5 + 3U_n \geq 5 \Rightarrow 5 + 3U_n > 0$

Or $3 + 5U_n \geq 0$ donc $\frac{3+5U_n}{5+3U_n} \geq 0$ d'où $U_{n+1} \geq 0$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 1 &= \frac{3+5U_n}{5+3U_n} - 1 = \frac{3+5U_n-5-3U_n}{5+3U_n} = \frac{2U_n-2}{5+3U_n} \\ &= \frac{2(U_n-1)}{5+3U_n} \end{aligned}$$

Or $U_n < 1$ donc $U_n - 1 < 0$ donc $U_{n+1} - 1 < 0$

Donc $U_{n+1} < 1$ par suite $0 \leq U_{n+1} < 1$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n < 1$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3+5U_n}{5+3U_n} - U_n = \frac{3+5U_n-5U_n-3(U_n)^2}{5+3U_n} = \frac{3-3(U_n)^2}{5+3U_n} = \frac{3[1-(U_n)^2]}{5+3U_n}$$

Or $0 \leq U_n < 1$ alors $0 \leq (U_n)^2 < 1$ donc $1 - (U_n)^2 \geq 0$

Ainsi $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente vers une limite finie ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 1$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3+5x}{5+3x}$

f est une fonction rationnelle donc continue sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$ donc f est continue en ℓ donc ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3+5x}{5+3x} = x \Leftrightarrow 5x + 3x^2 = 3 + 5x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Or $\ell \geq 0$ donc $\ell = 1$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1} = \frac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \frac{1-\frac{3+5U_n}{5+3U_n}}{1+\frac{3+5U_n}{5+3U_n}} = \frac{\frac{5+3U_n-3-5U_n}{5+3U_n}}{\frac{5+3U_n+3+5U_n}{5+3U_n}} = \frac{2(1-U_n)}{8(1+U_n)} = \frac{1}{4} V_n$$

Donc (V_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

b) On a : (V_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme

$$V_0 = 1 \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } V_n = V_0 q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{On a : } V_n = \frac{1 - U_n}{1 + U_n} \Leftrightarrow V_n \times (1 + U_n) = 1 - U_n$$

$$\Leftrightarrow V_n + V_n \times U_n = 1 - U_n \Leftrightarrow V_n \times U_n + U_n = 1 - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n \times (1 + V_n) = 1 - V_n \Leftrightarrow U_n = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \Leftrightarrow U_n = \frac{\frac{4^n - 1}{4^n}}{\frac{4^n + 1}{4^n}}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 1} \text{ Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } U_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 1}$$

$$\text{c) } U_n \geq 0,99 \Leftrightarrow \frac{4^n - 1}{4^n + 1} \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,99 \times (4^n + 1) \leq 4^n - 1$$

$$\Leftrightarrow 0,99 \times 4^n + 0,99 \leq 4^n - 1 \Leftrightarrow 0,99 \times 4^n - 4^n \leq -1 - 0,99$$

$$\Leftrightarrow -0,01 \times 4^n \leq -1,99 \Leftrightarrow 4^n \geq \frac{-1,99}{-0,01} \Leftrightarrow 4^n \geq 199$$

$$\Leftrightarrow \ln(4^n) \geq \ln(199) \Leftrightarrow n \ln(4) \geq \ln(199)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(199)}{\ln(4)} \Leftrightarrow n \geq 3,8183123 \dots$$

Ainsi à partir $n = 4$ on a $U_n \geq 0,99$

Exercice 3 :

$$1) \text{ a) } -2 \times 7 + 3 \times 8 = -14 + 24 = 10$$

Donc $(7, 8)$ est une solution de l'équation (E)

b) $(-2) \wedge 3 = 1$ *divise* 10 donc l'équation (E) admet des solutions

(x, y) est une solution de l'équation (E)

$$\Leftrightarrow -2x + 3y = 10 \Leftrightarrow -2x + 3y = -2 \times 7 + 3 \times 8$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 \times 7 = -3y + 3 \times 8 \Leftrightarrow -2(x - 7) = 3(-y + 8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ divise } -2(x - 7) \\ (-2) \wedge 3 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Lemme de Gauss}} 3 \text{ divise } (x - 7)$$

$$\Rightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x - 7 = 3k$$

$$\Rightarrow x = 3k + 7 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Or } -2(x - 7) = 3(-y + 8) \text{ alors } -2 \times 3k = 3(-y + 8)$$

$$\text{donc } -2k = -y + 8$$

$$\text{donc } y = 2k + 8$$

$$-2 \times (3k + 7) + 3(2k + 8) = -6k - 14 + 6k + 24 = 10$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3k + 7; 2k + 8) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } -2a_n + 3b_n &= -2 \times (7 + 3 \times 6^n) + 3(8 + 2 \times 6^n) \\ &= -14 - 6^{n+1} + 24 + 6^{n+1} = 10 \end{aligned}$$

donc $(a_n; b_n)$ est une solution de l'équation (E)

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{array}{l} d_n \text{ divise } a_n \\ d_n \text{ divise } b_n \end{array} \right\} &\Rightarrow d_n \text{ divise } -2a_n + 3b_n \\ &\Rightarrow d_n \text{ divise } 10 \end{aligned}$$

$$3) \text{ a) On a : } 6 \equiv 1 [5] \text{ donc } 6^n \equiv 1^n [5] \text{ d'où } 6^n \equiv 1 [5]$$

$$\text{b) On a } 6^n \equiv 1 [5] \text{ donc } 3 \times 6^n \equiv 3 [5]$$

$$\text{Donc } 7 + 3 \times 6^n \equiv 10 [5] \text{ d'où } a_n \equiv 0 [5]$$

$$\text{On a : } 6^n \equiv 1 [5] \text{ donc } 2 \times 6^n \equiv 2 [5]$$

$$\text{Donc } 8 + 2 \times 6^n \equiv 10 [5] \text{ d'où } b_n \equiv 0 [5]$$

$$\text{c) On a : } a_n \equiv 0 [5] \text{ donc } 5 \text{ divise } a_n \text{ et on a } b_n \equiv 0 [5] \text{ donc } 5 \text{ divise } b_n \\ \text{donc } 5 \text{ divise } d_n$$

$$\text{Or } d_n \text{ divise } 10 \text{ donc } d_n = 5 \text{ ou } d_n = 10$$

$$4) \text{ a) Pour } n = 1 \text{ on a } 6^1 \equiv 6 [10]$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ supposons que } 6^n \equiv 6 [10] \text{ et montrons que } 6^{n+1} \equiv 6 [10]$$

$$6^n \equiv 6 [10] \text{ alors } 6^{n+1} \equiv 36 [10] \text{ donc } 6^{n+1} \equiv 6 [10]$$

$$\text{Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } 6^n \equiv 6 [10]$$

$$\text{b) Pour tout } n \in \mathbb{N}^* ; 6^n \equiv 6 [10] \text{ alors } 3 \times 6^n \equiv 18 [10]$$

$$\text{Donc } 7 + 3 \times 6^n \equiv 25 [10] \text{ d'où } a_n \equiv 5 [10]$$

$$\text{c) On a : } a_n \equiv 5 [10] \text{ donc } 10 \text{ ne divise pas } a_n \text{ donc } d_n \neq 10$$

$$\text{Par suite } d_n = 5 \text{ (car } d_n = 5 \text{ ou } d_n = 10)$$

Exercice 4 :

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln(x) = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty)$$

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln(x) = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty)$$

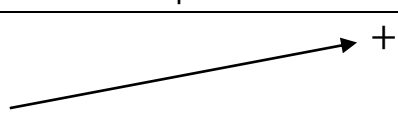
La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées (O ; $\vec{j}$) au voisinage de $(+\infty)$

2) a) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on a : $f'(x) = x + \frac{1}{x}$

Donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

b)

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f	$-\infty$	$+\infty$



c) On a f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc f est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $f(]0 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[$

Or $0 \in]-\infty ; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une unique solution α .

On a : $f(0,5) = \frac{5}{8} + \ln(0,5) \approx -0,068 < 0$

$f(0,6) = 0,68 + \ln(0,6) \approx 0,169 > 0$

Donc $0,5 < \alpha < 0,6$

3) a) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on a : $f'(x) = x + \frac{1}{x}$

Donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
f''(x)	-	ϕ	+

La dérivée seconde s'annule et change de signes en 1 et $f(1) = 1$

Ainsi le point G(1,1) est un point d'inflexion de la courbe (C)

c) Une équation de la tangente à (C) au point G est :

$$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$ donc $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$

Donc $T: y = 2x - 1$ est la tangente à (C) au point G.

4) a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 2$

$$= x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

D'où la fonction g est croissante

b) $g(1) = f(1) - (2 - 1) = 1 - 1 = 0$

g est croissante sur $]0, +\infty[$

- si $x < 1$ alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$
- si $1 \leq x$ alors $g(1) \leq g(x)$ donc $0 \leq g(x)$

x	0	1	$+\infty$
g(x)		ϕ	+

x	0	1	$+\infty$
f(x) - y = g(x)		ϕ	+
Position	T/(C)	T $\cap$ (C)	(C)/T

