

Exercice 1 :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0 \end{aligned}$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

$$2) \text{ a) Pour tout réel } x \geq 0 ; f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\text{b) Pour tout réel } x \geq 0 ; f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{c) Pour tout réel } x \geq 0 \text{ on a : } f''(x) = 0 \text{ sig } 2(1-x^2) = 0 \text{ sig } 1-x^2 = 0 \text{ sig } x = 1.$$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0 -

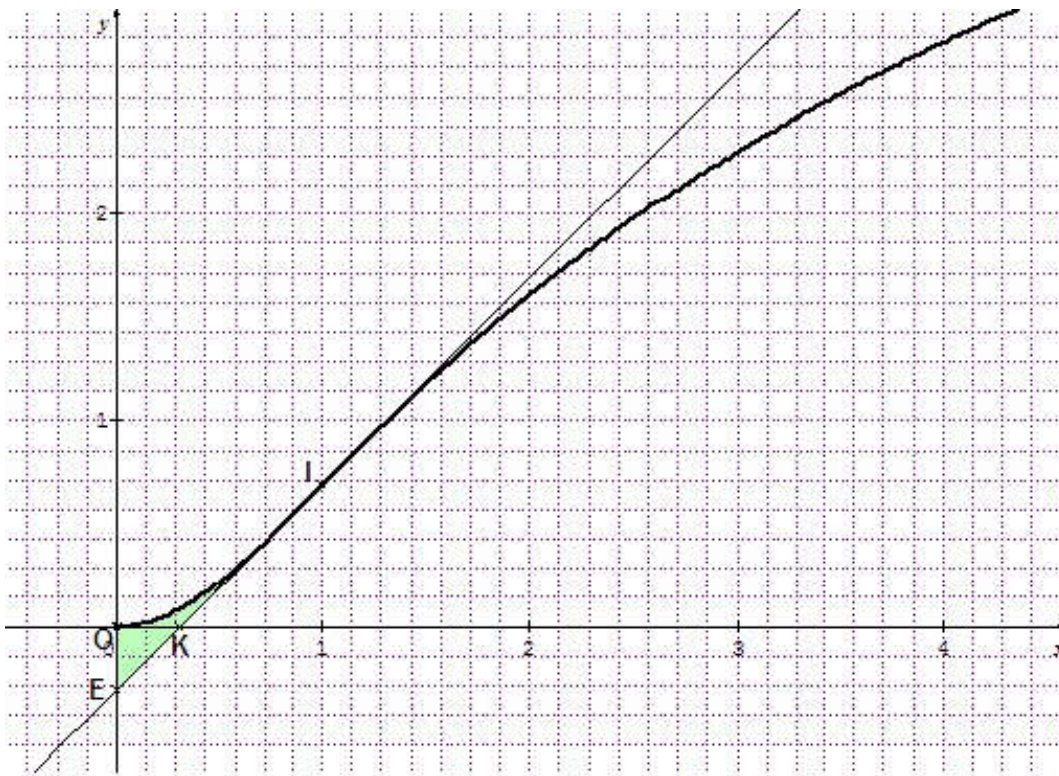
f'' s'annule en 1 en changeant de signe donc $I(1, \ln 2)$ est un point d'inflexion de (C).

$$3) \text{ a) La tangente à (C) au point I a pour équation : } T : y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ donc } T : y = 1(x-1) + \ln 2$$

donc $T : y = x - 1 + \ln 2$

$$\text{b) } M(x, y) \in (O, \vec{i}) \cap T \text{ éq } \begin{cases} y = 0 \\ y = x - 1 + \ln 2 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - \ln 2 \end{cases} \text{ d'où } K(1 - \ln 2, 0) \text{ est le point d'intersection de } T \text{ et l'axe des abscisses.}$$

$$M(x, y) \in (O, \vec{j}) \cap T \text{ éq } \begin{cases} x = 0 \\ y = x - 1 + \ln 2 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \ln 2 \end{cases} \text{ d'où } E(0, -1 + \ln 2) \text{ est le point d'intersection de } T \text{ et l'axe des ordonnées.}$$



c)

4) a) le triangle OHE est rectangle en O donc $L = \frac{OE \times OK}{2} = \frac{(1 - \ln 2)|\ln 2 - 1|}{2} = \frac{(1 - \ln 2)^2}{2}$

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x^2 \leq x$ donc $0 < 1 + x^2 \leq 1 + x$

D'où $\ln(1 + x^2) \leq \ln(1 + x)$ (car la fonction $\ln$ est croissante)

c) Pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{x+1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

d) On pose $u(x) = \ln(1+x)$ $u'(x) = \frac{1}{1+x}$

$v'(x) = 1$ $v(x) = x$

Donc $\int_0^1 \ln(1+x) dx = [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x}) dx$

$= \ln 2 - [x - \ln(1+x)]_0^1$

$= 2 \ln 2 - 1$

e) La courbe C étant au dessus de T sur l'intervalle $[0, 1]$

donc $S = \int_0^1 \ln(1+x^2) - (x - 1 + \ln 2) dx$

D'autre part : pour tout $x \in [0, 1]$

$\ln(1+x^2) \leq \ln(1+x)$ donc $\ln(1+x^2) - (x - 1 + \ln 2) \leq \ln(1+x) - (x - 1 + \ln 2)$

or les fonctions $x \mapsto \ln(1+x^2) - (x - 1 + \ln 2)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - (x - 1 + \ln 2)$ sont continues sur

$[0, 1]$ donc $\int_0^1 \ln(1+x^2) - (x - 1 + \ln 2) dx \leq \int_0^1 \ln(1+x) - (x - 1 + \ln 2) dx$

donc $S \leq \int_0^1 \ln(1+x) dx - \left[\frac{1}{2}x^2 - x + x \ln 2 \right]_0^1$

d'où $S \leq (2 \ln 2 - 1) - (\frac{1}{2} - 1 + \ln 2)$ et par suite $S \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$

On remarque graphiquement que $L \leq S$ donc $\frac{(1-\ln 2)^2}{2} \leq S \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

$$1) \ a) \ \det(M_\alpha) = \alpha \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-2\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \alpha(4-0) + 2\alpha(-2-2) + (0+8) \\ = 4\alpha - 8\alpha + 8 = -4\alpha + 8$$

b) M_α n'est pas inversible si $\det(M_\alpha) = 0$ c'est-à-dire pour $\alpha = 2$

2)

$$3) \ C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ éq } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ éq } \begin{cases} 2x+2y+2z=4 \\ -4x-4y=-4 \\ x+y-z=-4 \end{cases} \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y=1 \\ x+y-z=-4 \end{cases}$$

D'après (1)-(2) on obtient $z=1$ et d'après (2)-(3) on obtient $z=5$ ce qui est impossible Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \emptyset$

4) a)

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1+2x_1+2x_2 & -2x_1+2x_0+2x_1 & (-2)x_2+2x_2+2x_0 \\ 4x_1+(-4)x_1+0x_2 & 4x_1+(-4)x_0+0x_1 & 4x_2+(-4)x_2+0x_0 \\ 1x_1+1x_1+(-1)x_2 & 1x_1+1x_0+(-1)x_1 & 1x_2+1x_2+(-1)x_0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

$$b) \ A \times B = 4I \text{ donc } A \times \frac{1}{4}B = I \text{ et par suite } A^{-1} = \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ éq } \cdot A^{-1}xA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}x \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ éq } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}B \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \text{éq } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ éq } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x4 + \frac{1}{4}x(-4) + \frac{1}{2}x(-4) \\ \frac{1}{4}x4 + 0x(-4) + \frac{1}{2}x(-4) \\ \frac{1}{2}x4 + \frac{1}{4}x(-4) + 0x(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}^3} = \{(-2, -1, 1)\}$$

Exercice 3 :

1) a) Pour $n=0$, $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ vrai

Soit $n \geq 0$ supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a $0 \leq u_n \leq 1$ donc $1 \leq 1+u_n \leq 2$ d'où $1 \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{2}$ et par suite $1-1 \leq \sqrt{1+u_n} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$ d'où

$$0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2} - 1 \leq 1$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 1$

b) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - 1 - u_n = \sqrt{1+u_n} (1 - \sqrt{1+u_n})$

On a : $u_n \geq 0$ donc $\sqrt{1+u_n} \geq 1$ d'où $1 - \sqrt{1+u_n} \leq 0$ et par suite $u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l \in [0,1]$

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$

(u_n) converge vers $l \in [0,1]$

f est continue sur $[-1, +\infty[$ et en particulier en l

donc l est solution de l'équation $f(l) = l$

$$f(l) = l \text{ éq } \sqrt{1+l} - 1 = l \text{ éq } \sqrt{1+l} = l + 1 \text{ éq } \sqrt{1+l}(1 - \sqrt{1+l}) = 0 \text{ éq } \sqrt{1+l} = 1 \text{ éq } 1 + l = 0 \text{ éq } l = 0$$

2) a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \ln(1+u_{n+1}) = \ln(\sqrt{1+u_n}) = \frac{1}{2} \ln(1+u_n) = \frac{1}{2} v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(1+u_0) = \ln 2$ b) Pour tout

entier naturel n , $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2 = \frac{\ln 2}{2^n}$

On a $v_n = \ln(1+u_n)$ éq $1+u_n = e^{v_n}$ éq $u_n = e^{\frac{\ln 2}{2^n}} - 1$

Exercice 4 :

1) a) $(2-2i)^2 = 4 - 4 - 8i = -8i$

b) $\Delta = (2+8i)^2 + 60 - 40i = -8i = (2-2i)^2$

donc $z' = \frac{2+8i-2+2i}{2} = 5i$ et $z'' = \frac{2+8i+2-2i}{2} = 2+3i$

$S_{\mathbb{C}} = \{5i, 2+3i\}$

2) a) $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A}) = (-3-3i)(-2-2i) = 6+6i+6i-6 = 12i$

b) $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A})$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux par suite le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) $(z_M - z_A)(\overline{z_N - z_A}) = (x-2-3i)(-iy-2+3i) = (-2x-3y+13) + i(-xy+3x+2y)$

b) Les points A, M et N sont deux à deux distincts donc $(-2x-3y+13) + i(-xy+3x+2y) \neq 0$ Deuxième méthode :

Supposons qu'il existe un couple de réels (x, y) tel que

$(-2x-3y+13) + i(-xy+3x+2y) = 0$

$$(-2x-3y+13) + i(-xy+3x+2y) = 0 \cdot \text{éq} \begin{cases} -2x-3y+13 = 0 \\ -xy+3x+2y = 0 \end{cases} \text{éq} \begin{cases} y = \frac{13-2x}{3} \\ 3x+y(2-x) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

L'équation (**) devient $3x + \frac{13-2x}{3}(2-x) = 0$ ou encore $2x^2 - 8x + 26 = 0$ qui a pour discriminant

$\Delta < 0$, donc x n'existe pas.

Conclusion : $(-2x-3y+13) + i(-xy+3x+2y) \neq 0$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $(z_M - z_A)(\overline{z_N - z_A})$ est imaginaire pur

ce qui équivaut à $-2x - 3y + 13 = 0$ (on a : $-xy + 3x + 2y \neq 0$ d'après b))

4) a) Le triangle ABC est rectangle en A donc pour $x=-1$ et $y=5$ le couple $(-1,5)$ est une solution de (E).

b) On a $2x + 3y = 13$ éq $2x + 3y = 2 \times (-1) + 3 \times 5$ éq $2(x+1) = 3(5-y)$ (*)

donc 2 divise $3(5-y)$ or $2 \wedge 3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, 2 divise $(5-y)$

donc $5-y = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$ d'où $y=5-2k$.

D'après (*) on a $2(x+1) = 3(2k)$ sig $x=3k-1$; $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement, pour $(x,y) = (-1+3k, 5-2k)$ on a $2(-1+3k) + 3(5-2k) = 13$

Donc $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-1+3k, 5-2k) ; \text{avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Ou bien directement : comme $(-1,5)$ est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(-3k-1, 5+2k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $2x + 3y = 13$ éq $(x,y) = (-1+3k, 5-2k)$; ($k \in \mathbb{Z}$)

si de plus $-4 \leq x \leq 4$ alors $-4 \leq -1+3k \leq 4$ sig $-1 \leq k \leq \frac{5}{3}$, donc $k \in \{-1, 0, 1\}$

Par suite $(x,y) \in \{(-4, 7), (-1, 5), (2, 3)\}$

Ainsi AMN est rectangle en A (et $-4 \leq x \leq 4$) pour :

$[M(-4) \text{ et } N(7i)]$, pour $[M(-1) \text{ et } N(5i)]$ et pour $[M(2) \text{ et } N(3i)]$