

**Exercice 1 (4,5 points)**

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes – géométrie.
- ✓ **Aptitudes visées** : Représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé** :

1) B est le milieu du segment [AC]  $\Leftrightarrow z_B = \frac{z_A + z_C}{2}$

$\Leftrightarrow -2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

2) a)  $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$

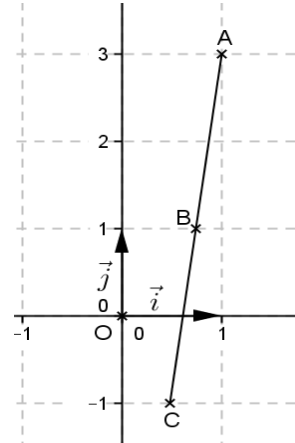
b)  $\Delta = 7 + 24i$  alors  $\delta = 4 + 3i$  est une racine carrée de  $\Delta$

$z' = \frac{-i - 4 - 3i}{-4} = 1 + i$  ,  $z'' = \frac{-i + 4 + 3i}{-4} = -1 - \frac{1}{2}i$

$S_C = \{1 + i, -1 - \frac{1}{2}i\}$

3) a)  $iz = i(-1 - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} - i$

b) Comme  $z$  est une solution de l'équation (E) alors B est le milieu du segment [AC]. (voir figure)



**Exercice 2 (5 points)**

- ✓ **Contenu** : Suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées** : Etudier une suite récurrente, reconnaître un minorant d'une suite, étudier la convergence d'une suite à l'aide d'une suite géométrique.
- ✓ **Corrigé** :

1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 + U_{n-1}^2 + 2U_{n-1} = (1 + U_{n-1})^2$

b) Par récurrence :

On a  $U_0 = -\frac{1}{2} > -1$

Soit  $n$  un entier naturel, on suppose que  $U_n > -1$

On a  $U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n$ .

$$1 + U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n + 1 \\ = (U_n + 1)^2$$

On a  $U_n > -1$  donc  $(U_n + 1)^2 > 0$

et par suite  $U_{n+1} > -1$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $U_n > -1$

2) a) Pour tout un entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = \ln(1 + U_{n+1}) = \ln(1 + U_n)^2 = 2 \ln(1 + U_n) = 2 V_n$

**Conclusion** :  $V$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$V_0 = \ln(1 + U_0) = \ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln 2$

b) Pour tout un entier naturel  $n$ ,  $V_n = V_0 q^n = -2^n \ln 2$

On a  $V_n = \ln(1 + U_n)$  alors  $U_n = e^{V_n} - 1 = e^{-2^n \ln 2} - 1$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$

**Exercice 3 (4,5 points)**

✓ **Contenu :** Matrices, équation de tangente à une courbe, point d'inflexion et dérivée seconde, système linéaire  $3 \times 3$ .

✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, reconnaître l'inverse d'une matrice d'ordre 3, résoudre un système linéaire  $3 \times 3$ , interpréter le nombre dérivé d'une fonction en un point, appliquer le théorème relatif au point d'inflexion et la dérivée seconde.

✓ **Corrigé :**

1)

$$a) \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_3$$

$$b) \quad A \times B = 5I_3 \text{ alors } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{5}B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

2)

a) La droite d'équation  $y = 4x - 4$  est tangente à (C) au point d'abscisse 1 signifie  $f'(1) = 4$  et  $f(1) = 0$ .

« (C) admet un point d'inflexion d'abscisse  $-1$  » donne  $f''(-1) = 0$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f(1) = a + b + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(1) = 3a + 2b + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(-1) = -6a + 2b$$

**Conclusion :**  $a, b$  et  $c$  vérifient le système (S) :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -6a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -6a + 2b = 0 \end{cases} \text{ signifie } A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ signifie } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{-16}{5} \end{pmatrix}$$

**Conclusion :** Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{16}{5}x$

#### Exercice 4 (6 points)

✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.

✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique pour : déterminer les limites d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, reconnaître une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.

✓ **Corrigé :**

1) Traçage de T : voir graphique

2) a)  $f(0) = -1$  et  $f'(0) = -2$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

c) Tableau de variation de f

|         |           |         |   |        |           |
|---------|-----------|---------|---|--------|-----------|
| x       | $-\infty$ | -2      |   | 1      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0       | - | 0      | +         |
| $f(x)$  |           | $f(-2)$ |   | $f(1)$ |           |

$0 \nearrow \quad \nwarrow \quad \nearrow +\infty$

3) a) Voir figure

$$b) \text{Aire}_{(OAB)} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Aire}_{(OAC)} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OC}}{2} = \frac{3}{8}$$

c) On a :  $\text{Aire}_{(OAB)} < A < \text{Aire}_{(OAC)}$  alors  $\frac{1}{4} < A < \frac{3}{8}$  d'où  $2 < 8A < 3$

