

Matière : Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes - géométrie
- ✓ **Aptitudes visées** : Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaître la nature d'un triangle.
- ✓ **Corrigé** :

1- a) $i^3 + i \cdot i^2 - 2i + 4i = -i - i - 2i + 4i = 0$ donc i est une solution de (E).

b) Comme i est une solution de (E) alors on peut écrire :

$$z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$$

$$\begin{cases} b - i = i \\ c - ib = -2 \\ -ic = 4 \end{cases}$$

Par identification, on obtient d'où $b = 2i$ et $c = -4$.

Par suite $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + 2iz - 4)$

2- a) $(z - i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$ signifie $z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$.

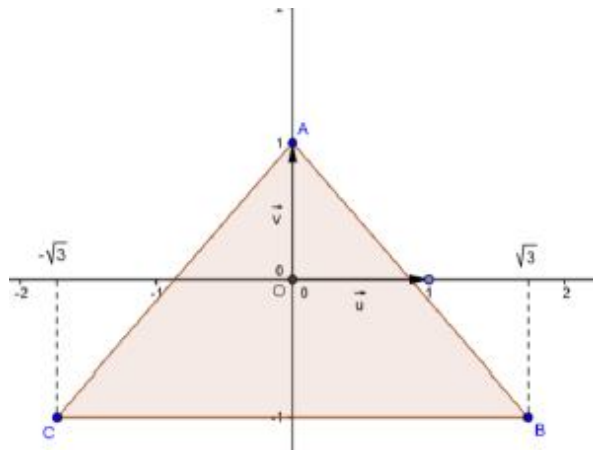
Or $z^2 + 2iz - 4 = 0$. $a=1$, $b=2i=2b'$ signifie $b'=i$ et $c=-4$

Donc $\Delta' = b'^2 - ac = 3$ d'où $z' = -i + \sqrt{3}$ et $z'' = -i - \sqrt{3}$

Conclusion : $S_C = \{ i; -i + \sqrt{3}; -i - \sqrt{3} \}$.

b) Question hors programme. (non notée)

3- a)



$$b) \quad AB = |z_B - z_A| = |-i + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-i - \sqrt{3} - i| = |-\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$$

Ainsi $AB = AC$ donc ABC est un triangle isocèle de sommet principale A.

Exercice 2 (5,5 points)

- ✓ **Contenu :** Déterminant d'une matrice d'ordre 3, inverse d'une matrice d'ordre 3, système linéaire 3×3 .
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3, reconnaître l'inverse d'une matrice d'ordre 3, résoudre un système linéaire 3×3 .
- ✓ **Corrigé :**

1- (S) :
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3200 \\ 4x + 2y + 5z = 4600 \\ 3x + y + 3z = 2700 \end{cases}$$

2- a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 12 = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{donc} \quad A^{-1} = B$$

b) Le système (S) équivaut à $AU = V$ avec $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$
Par suite $AU = V$ signifie $U = A^{-1}V$ signifie $U = BV$ signifie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

D'où $x = 200$ dinars ; $y = 900$ dinars et $z = 400$ dinars .

Exercice 3 (4,5 points)

- ✓ **Contenu :** Arithmétique.
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par une équation du type $ax + by = c$, connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations du type $ax + by = c$.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) Si (x, y) est solution de (E) alors $8x + 5y = 100$ signifie $8x = 100 - 5y = 5(20 - y)$ ce qui donne que 5 divise $8x$ et comme $5 \wedge 8 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss 5 divise x c'est-à-dire x est un multiple de 5.

b) D'après a) si (x, y) est solution de (E) alors x est multiple de 5 donc $x = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ on remplace x dans l'équation (E) on obtient $8 \times 5k + 5y = 100$ signifie $8k + y = 20$
d'où $y = 20 - 8k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le couple $(x, y) = (5k, 20 - 8k)$ vérifie l'équation (E)

Conclusion $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(5k, 20 - 8k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

2- soit x le nombre de lycéens et y le nombre de collégiens.

Les composantes possibles de ce groupe vérifient l'équation (E) : $8x + 5y = 100$ donc d'après 1) $(x, y) = \{(5k, 20 - 8k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $5k > 0$ et $20 - 8k \geq 0$ ce qui donne $k > 0$ et $k \leq \frac{20}{8}$
Ainsi $k \in \{1, 2\}$.

Conclusion : $(x, y) \in \{(5, 12); (10, 4)\}$.

Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu** : Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées** : Lire un tableau de variation d'une fonction, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, reconnaître une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.

✓ **Corrigé** :

1- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) $A(1, 1) \in C$ signifie $f(1) = 1$

$T: y = x$ est la tangente à C au point $A(1, 1)$ donc $f'(1) = 1$.

2- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0$.

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ et par suite C admet une demi tangente horizontale à dirigée à droite au point O .

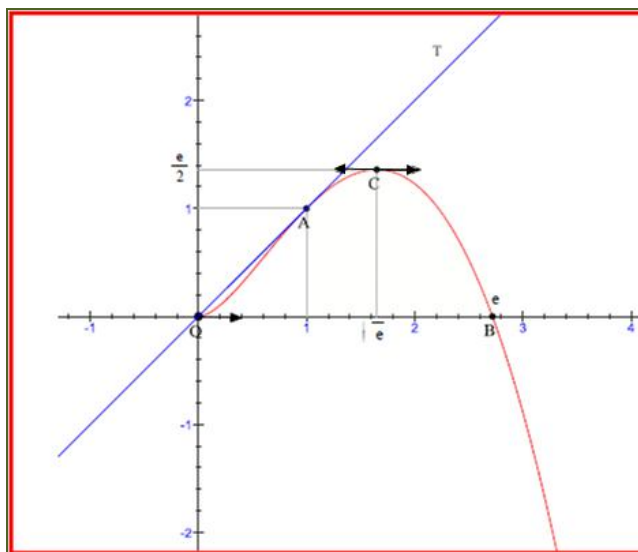
b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$.

donc C admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $(1 - \ln x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $\ln x = 1$ signifie $x = 0$ ou $x = e$.

Conclusion : $C \cap (Ox) = \{O(0, 0); B(e, 0)\}$.

d)



$$3- A = \int_1^e (1 - \ln x) x^2 dx = \frac{e^3 - 4}{9} \text{ (u.a.)}$$

A l'aide d'une intégration par partie, on pose : $u(x) = 1 - \ln x$ et $v'(x) = x^2$

donc $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{3} x^3$, ce qui donne :

$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 (1 - \ln x) \right]_1^e + \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{e^3 - 4}{9} \text{ (u.a.)}$$