

## CORRIGE

### Exercice n°1

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes, équation du second degré, interprétation géométrique.
- ✓ **Aptitudes visées** : connaître le conjugué d'un nombre complexe, interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe, résoudre une équation complexe du second degré.
- ✓ **Corrigé** :

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) |
| a  | b  | c  | c  |

### Exercice n°2

- ✓ **Contenu** : Systèmes linéaires de n équations à p inconnues  $n \leq 3$  et  $p \leq 3$ , opérations sur les matrices, déterminant d'une matrice, inverse d'une matrice.
- ✓ **Aptitudes visées** : Résoudre un système linéaire, utiliser les opérations sur les matrices (multiplication et multiplication par un réel), calculer le déterminant d'une matrice, reconnaître la matrice inverse.
- ✓ **Corrigé** :

$$1) a) \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 8 = 6 \neq 0$$

Donc A est inversible.

$$b) \text{ On a } \frac{1}{6} B.A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\text{On a } A \text{ est inversible et } \frac{1}{6} B.A = I_3 \text{ donc } A^{-1} = \frac{1}{6} B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$2) a- F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

$$\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(-1) = 0 \\ F(2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -1 + a - b + c = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

ainsi a, b et c, s'ils existent, sont solutions du système (S) :

$$b) (S) : \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

Une écriture matricielle du système (S) est :

$$A \times X = M \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c) (S) \Leftrightarrow A \times X = M \Leftrightarrow X = A^{-1} \times M$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} M = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$$

### Exercice n°3

- ✓ **Contenu** : Arithmétique : Congruence dans  $\mathbb{Z}$ , équations du type  $ax + by = c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des entiers relatifs.
- ✓ **Aptitudes visées** : Connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , reconnaître deux nombres premiers entre eux, résoudre une équation du type  $ax + by = c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des entiers relatifs.

#### ✓ Corrigé :

1)  $4a + 7b = 400$ .

2) (E) :  $4x + 7y = 400$ .

On a  $4 \times 100 + 7 \times 0 = 400$  alors le couple  $(100; 0)$  est une solution particulière de (E).

Par suite  $4x + 7y = 4 \times 100 + 7 \times 0$  signifie  $4(x - 100) = -7y$  ainsi 7 divise  $4(x - 100)$

or  $7 \wedge 4 = 1$  alors 7 divise  $(x - 100)$  et par suite  $x = 7k + 100$  où  $k \in \mathbb{Z}$  et comme

$4(x - 100) = -7y$  on a  $4(7k) = -7y$  d'où  $y = -4k$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Réciproquement : pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le couple  $(7k + 100, -4k)$  vérifie l'équation (E) en effet  $4(7k + 100) + 7(-4k) = 28k + 400 - 28k = 400$

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (7k + 100, -4k) ; k \in \mathbb{Z} \}$ .

3) D'après 1) on a :  $4a + 7b = 400$  donc  $a = 7k + 100$  et  $b = -4k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

D'autre part :  $68 \leq a + b \leq 72$

signifie  $\begin{cases} 68 \leq 3k + 100 \leq 72 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$  signifie  $\begin{cases} \frac{-32}{3} \leq k \leq \frac{-28}{3} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$  d'où  $k = -10$ .

Conclusion :  $a = 30$  et  $b = 40$ .

### Exercice n°4

- ✓ **Contenu** : Interprétation d'une courbe, étude de fonctions, dérivabilité, fonction réciproque, primitives, calcul intégral, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées** : lire graphiquement une courbe, dérivabilité, fonction bijective, courbe de la fonction réciproque, calculer une aire.

#### Corrigé :

1) a) On a :  $f(1) = 1$  et  $f(e) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\infty$  (C admet une

demi-tangente verticale au point d'abscisse e)

c)  $f'_d(1)$  est la pente de la droite qui porte la demi-tangente à C au point d'abscisse 1

$f'_d(1) = \frac{-0,5 - 1}{2 - 1} = -1,5 = -\frac{3}{2}$

d) f est strictement décroissante sur  $I = [1, e]$

2) a) f est définie et strictement décroissante sur  $[1, e]$

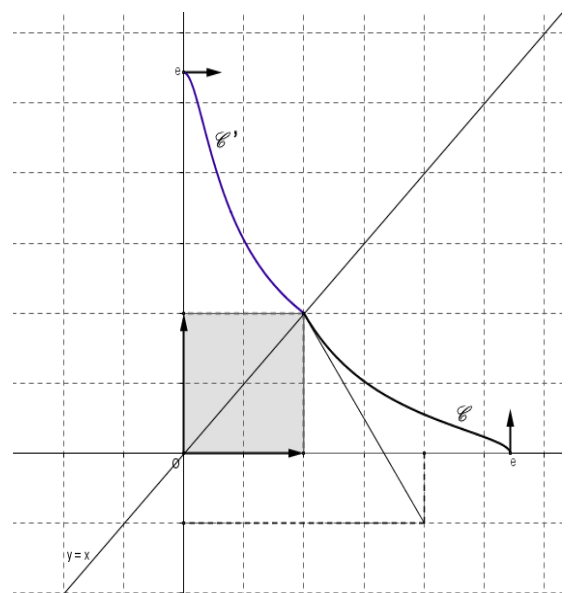
donc elle réalise une bijection de  $I = [1, e]$  sur

$f([1, e])$ , de plus f est continue sur l'intervalle I donc

$f([1, e]) = [f(e), f(1)] = [0, 1] = J$

b) C et C' sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

3) a) La fonction  $x \rightarrow 1 - \ln x$  est dérivable et strictement



positive sur  $[1, e[$  donc  $x \rightarrow \sqrt{1-\ln x}$  est dérivable sur  $[1, e[$  et par suite la fonction

$x \rightarrow F(x) = -\frac{2}{3} (1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}$  dérivable sur  $[1, e[$  et pour tout  $x$  de  $[1, e[$  on a :

$$F'(x) = -\frac{2}{3}$$

$$\left[ -\frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x} + (1-\ln x) \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}} \right] = -\frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x} - \frac{1}{2x}\sqrt{1-\ln x} \right] = -\frac{2}{3} \left[ -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} \right] = f(x)$$

Dérivabilité de  $F$  à gauche en  $e$  :

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{F(x) - F(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{2}{3} \sqrt{1-\ln x} \cdot \frac{\ln x - 1}{x - e} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 = f(e)$$

D'où  $F$  est dérivable sur  $[1, e]$  et on a  $F'(x) = f(x)$  et par suite  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[1, e]$ .

$$\text{b) } A_1 = \left[ \int_1^e f(x) dx \right] \times 9 \text{ cm}^2 = [F(x)]_1^e \times 9 \text{ cm}^2 = [F(e) - F(1)] \times 9 \text{ cm}^2 = \frac{2}{3} \times 9 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$$

$$\text{c) } A = 2 A_1 + a \quad \text{où } a \text{ est l'aire du carré de côté } 1 \text{ et par suite } A = 2 A_1 + 9 = 21 \text{ cm}^2$$