

Matière : Mathématiques (Corrigé)

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice porte sur la partie « Graphe » qui est supprimée du programme officiel de la section « Sciences de l'informatique » à partir de l'année scolaire 2009/2010.

Exercice 2 (3,5 points)

✓ **Contenu** : Arithmétique.

✓ **Aptitudes visées** : Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$,

Calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations du type: $ax + by = c$.

✓ **Corrigé** :

1) (E) : $2x + 3y = 5$. On remarque que le couple (1,1) est une solution particulière de (E)

On a
$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ (2x - 1) + (3y - 1) = 5 \end{array}$$
 d'où $2(x - 1) = 3(1 - y)$ on en déduit que 3 divise $2(x - 1)$,

or $3 \nmid 2$, d'après le lemme de Gauss on a 3 divise $(x - 1)$

ainsi $x = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ par suite $y = 1 - 2k$. Par vérification, on a

$$2(1 + 3k) + 3(1 - 2k) = 5 \text{ d'où } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(1 + 3k, 1 - 2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{array}{l} 2) a) \quad \begin{array}{l} n - 8 = 2(a - 3) \\ n - 3 = 3(b - 3) + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{array} \end{array}$$

b)

$$2a - 3b = n + 8 - (n + 3) = n + 8 - n - 3 = 5$$

$(a, -b)$ est une solution de (E) alors $a = 1 + 3k$ et $-b = 1 - 2k$ $k \in \mathbb{Z}$

$$n = 2a - 8 = 2(1 + 3k) - 8 = 6(k - 1)$$

d'où n est un multiple de 6 compris entre 50 et 55.

$$50 < -6 + 6k < 55 \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \frac{56}{6} < k < \frac{61}{6} = 10,16 \text{ d'où } k = 10$$

$$\text{donc } n = 54, \quad a = 1 + 3k = 31 \quad \text{et } b = 2k - 1 = 19$$

Exercice 3 (4,5 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé :**

1)a) $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$

b) $D \in \mathbb{C} : 1 - (1 - i)^2 - 4i = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$

d'où $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -2$

2)a) $S_I(A) = C \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 0 - 1 = -1 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2 + 1 = 3 \end{cases}$ d'où $z_C = -1 + 3i$; $C(-1 + 3i)$

$S_I(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 0 + 2 = 2 \\ y_D = 2y_I - y_B = 2 - 0 = 2 \end{cases}$ d'où $z_D = 2 + 2i$; $D(2 + 2i)$

b) $I = A * C = B * D \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme

$AB = |z_2 - z_1| = |-3 + i| = \sqrt{10}$ et $AD = |z_D - z_1| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$ donc $AB = AD$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 6 \neq 0$

Conclusion : $\begin{cases} ABCD \text{ est un parallélogramme} \\ AB = AD \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \neq 0 \end{cases}$ donc $ABCD$ est un carré

Exercice 4 (5 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :**
 - Exploiter la courbe d'une fonction pour lire : des images, des nombres dérivés, des limites, et le sens de variation.
 - Reconnaître qu'une fonction est la primitive d'une fonction donnée, calculer une intégrale, calculer une aire plane.

✓ **Corrigé :**

1)a) $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$

b)

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$f(3)$	0

2)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x} = (-x^2 + (2-a)x + a-b)e^{-x}$$

b) $f(0) = b$ et $b = -1$; $f'(0) = a - b = 0 \Rightarrow a = -1$

d'où pour tout réel x , $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$

3)a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x)e^{-x} = (x^2 - x - 1)e^{-x} = f(x)$$

b) $A = - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 F'(x) dx = F(0) - F(1) = 0 - (-1 - 1)e^{-1} = \frac{2}{e}$

Exercice 5 (3 points)

✓ **Contenu :** Probabilité uniforme, événements indépendants, variable aléatoire.

✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un événement, interpréter la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

✓ **Corrigé :**

1)a) A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,0003$

b) Soit l'événement D : « La calculatrice est défectueuse »

$$p(D) = p(A \cup B) - p(A) - p(B) = p(A \cap B) = 0,01 \cdot 0,03 = 0,0003$$

2) Soit X : le nombre de calculatrices défectueuses.

$$p(X = 2) = C_{20}^2 (p(D))^2 (1 - p(D))^{18} = 0,144$$

3) $p(X \leq 1) < 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) < 0,5 \Leftrightarrow 1 - (0,9603)^n < 0,5 \Leftrightarrow (0,9603)^n > 0,5$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9603) > \ln 0,5 \quad (x \mapsto \ln x \text{ est croissante})$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{-\ln 2}{\ln(0,9603)} \approx 17,11 \text{ d'où le nombre maximum de calculatrices est } 17$$