

Corrigé (Mathématiques)

Section : Sciences de l'Informatique

Session principale 2008

Exercice 1 :

✓ **Contenu :** Suites réelles

✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, détermine la limite d'une suite convergente.

- 1) b) ($u_{n+1} = -2 u_n$)
2) a) ($u_{n+1} - u_n = \ln 3 > 0$)
3) a) ($\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n}) = 0$ et $e^0 = 1$)

Exercice 2 :

✓ **Contenu :** Arithmétique : résolution des équations du type : $ax+by=c$

✓ **Aptitudes visées :** Connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, calculer

le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations du type : $ax+by=c$.

1) $19a = 7b$

On a $19 \wedge 7 = 1$ d'où $a = 7k, k \in \mathbb{Z}$ et par suite $b = 19k$

les couples sont de la forme $(7k, 19k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) $19 \times 3 - 7 \times 8 = 57 - 56 = 1$

b)

$$\begin{cases} 19x - 7y = 1 & (1) \\ 19 \times 3 - 7 \times 8 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow 19(x - 3) - 7(y - 8) = 0 \Leftrightarrow 19(x - 3) = 7(y - 8)$$

$$\text{d'après la question 1) on a : } \begin{cases} x - 3 = 7k \\ y - 8 = 19k \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 7k \\ y = 8 + 19k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3 + 7k, 8 + 19k) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 3 :

✓ **Contenu :** Nombres complexes

✓ **Aptitudes visées :** Déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.

1) $\Delta' = (1 + i)^2 - (-1 + 2i) = 1$; $S_{\mathbb{C}} = \{i, 2 + i\}$

2) a) $OA = |i| = 1$; $OB = |2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$; $AB = |2 + i - i| = 2$.

b) $OA^2 + AB^2 = 1 + 2^2 = 5 = OB^2$, d'après le théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle OAB est rectangle en A.

c) OABC est un rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow z_A = z_B - z_C \Leftrightarrow z_C = z_B - z_A \Leftrightarrow z_C = 2$$

Exercice 4 :

✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.

✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un graphique pour : donner une image, un nombre dérivé; des asymptotes; le signe d'une fonction et des solutions d'une équation, calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, calculer une aire plane.

1) a) $f(-1) = 3$; $f'(-1) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = 0$ admet deux solutions ($\mathcal{C}$ et $(O, \vec{i})$ se coupent en deux points)

2) a) $f(-1) = 2 + m + \underbrace{p \ln(1)}_0 = 3 \Leftrightarrow 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$

b) $f'(x) = -2 + \frac{p}{x+2}$

c) $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + p = 0 \Leftrightarrow p = 2$ d'où $f(x) = -2x + 1 + 2 \ln(x+2)$

d)

$$f(x) - (-2x + 1) = 2 \ln(x+2) ; x \in]-2, +\infty[; \ln(x+2) < 0 \Leftrightarrow x+2 < 1 \Leftrightarrow x < -1$$

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	—	+	
Position de $\mathcal{C}$ % D	$D/\mathcal{C}$	$\mathcal{C}/D$	

3) a) on pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \frac{1}{x+2} \end{cases}$

$$\int_{-1}^1 \ln(x+2) dx = [(x+2) \ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx = 3 \ln 3 - 2$$

b) $A = 6 \ln 3 - 4$ (u.a)

Exercice 5 :

- ✓ **Contenu :** Plans de l'espace, opérations sur les matrices, déterminant d'une matrice, inverse d'une matrice, résolution d'un système linéaire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer une équation cartésienne d'un plan, résoudre un système linéaire (3x3) en utilisant l'inverse d'une matrice, déterminer l'intersection de trois plans.

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ alors A, B et C ne sont pas alignés.

b) $0 - 0 - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$; $0 - 2 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow B \in (ABC)$;
 $1 - 2 - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow C \in (ABC)$ d'où $(ABC) : x - 2y + z + 2 = 0$

2) a) $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 6 = -1 \neq 0$ donc M est inversible

b) On vérifie que $M \times \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

3) a) $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(-17, -5, 5)\}$$

b) D'après a), on en déduit que les plans (ABC) , P et Q sont sécants au point $E(-17, -5, 5)$