

Correction : Exercice 1 (5 points)

1) a) $\det(A) = -(-7) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7(-5) - 3(7) = -56.$

Puisque $\det(A) = -56 \neq 0$, la matrice A est **inversible**.

b) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 20 & -7 \\ 5 & 4 & -7 \\ -9 & 4 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & 0 \\ 0 & 0 & -56 \end{pmatrix} = -56 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $A \times B = -56I_3 \Leftrightarrow A \times \left(-\frac{1}{56}B\right) = I_3 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{56}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{56} & -\frac{20}{56} & \frac{7}{56} \\ -\frac{5}{56} & -\frac{4}{56} & \frac{7}{56} \\ \frac{9}{56} & -\frac{4}{56} & \frac{21}{56} \end{pmatrix}.$

2) a) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$ Le système (S) s'écrit sous la forme $A \times X = C$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Puisque A est inversible, $A \times X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$. On a :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{56} \begin{pmatrix} -3 & 20 & -7 \\ 5 & 4 & -7 \\ -9 & 4 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 3$$

L'ensemble des solutions est $S_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 3)\}.$

3) a) $P(1) = a(1)^3 + (-2b + ia)(1)^2 - (5b + 4ia)(1) + 2c + ic = a - 2b + ia - 5b - 4ia + 2c + ic = (a - 2b - 5b + 2c) + i(a - 4a + c) = (a - 7b + 2c) + i(-3a + c).$

$$P(-1) = a(-1)^3 + (-2b + ia)(-1)^2 - (5b + 4ia)(-1) + 2c + ic = -a + (-2b + ia)(1) + (5b + 4ia) + 2c + ic = (-a - 2b + 5b + 2c) + i(a + 4a + c) = (-a + 3b + 2c) + i(5a + c)$$

b) On sait que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Par identification des parties réelles et imaginaires :

- $P(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[P(1)] = 0 \\ \operatorname{Im}[P(1)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 7b + 2c = 0 \\ -3a + c = 0 \end{cases}$
- $\operatorname{Re}[P(-1)] = 8 \Leftrightarrow -a + 3b + 2c = 8$

On obtient exactement le système (S) :

$$\begin{cases} a - 7b + 2c = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 8 \end{cases}$$

- c) D'après la question 3)b), les réels a, b, c sont les solutions du système (S). D'après la question 2)b), on a :

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 3$$

Remplaçons ces valeurs dans l'expression initiale de $P(z)$:

- Coefficient de z^3 : $a = 1$
- Coefficient de z^2 : $-2b + ia = -2(1) + i(1) = -2 + i$
- Coefficient de z : $-(5b + 4ia) = -(5(1) + 4i(1)) = -(5 + 4i)$
- Terme constant : $c(2 + i) = 3(2 + i)$

On obtient donc :

$$P(z) = z^3 + (-2 + i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(2 + i)$$

Correction : Exercice 2 (4 points)

- 1) a) On a : $3(6) - 7(1) = 18 - 7 = 11$, donc le couple **(6,1) est une solution de (E).**

- b) On a le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - 7y = 11 & (1) \\ 3(6) - 7(1) = 11 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2), on obtient :

$$3(x - 6) - 7(y - 1) = 0 \iff 3(x - 6) = 7(y - 1)$$

7 divise $3(x - 6)$. Or, 7 et 3 sont premiers entre eux ($7 \wedge 3 = 1$). D'après le **théorème de Gauss**, 7 divise $(x - 6)$. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x - 6 = 7k \iff x = 6 + 7k$$

On a : $3(7k) = 7(y - 1) \iff 3k = y - 1 \iff y = 1 + 3k$

réciroquement : pour tout entier k , $3(6 + 7k) - 7(1 + 3k) = 18 + 21k - 7 - 21k = 11$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\mathbf{S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(6 + 7k, 1 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}}$

- 2) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Le couple (x, y) est solution de (E') si et seulement si $3x^2 - 7y = 11$.
En posant $X = x^2$, cette équation s'écrit $3X - 7y = 11$.
Ceci signifie exactement que le couple (X, y) , c'est-à-dire **(x^2, y) , est solution de l'équation (E).**
- b) Si (x, y) est solution de (E'), alors (x^2, y) est solution de (E) d'après la question précédente.
D'après la question 1)b), toutes les solutions de (E) sont de la forme $(6 + 7k, 1 + 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
La première composante x^2 s'écrit donc nécessairement sous la forme :

$$x^2 = 6 + 7k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc :

$$\mathbf{x^2 \equiv 6 [7]}$$

- 3) a) • Si $x \equiv 0 [7]$, alors $x^2 \equiv 0^2 \equiv 0 [7]$.

- Si $x \equiv 1 [7]$, alors $x^2 \equiv 1^2 \equiv 1 [7]$.
- Si $x \equiv 2 [7]$, alors $x^2 \equiv 2^2 \equiv 4 [7]$.
- Si $x \equiv 3 [7]$, alors $x^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 [7]$.
- Si $x \equiv 4 [7]$, alors $x^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2 [7]$.
- Si $x \equiv 5 [7]$, alors $x^2 \equiv 5^2 = 25 \equiv 4 [7]$.
- Si $x \equiv 6 [7]$, alors $x^2 \equiv 6^2 = 36 \equiv 1 [7]$.

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de x^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

- b)** D'après la question 2)b), s'il existe une solution (x, y) à l'équation (E'), alors x doit vérifier la condition $x^2 \equiv 6 [7]$.
Cependant, d'après le tableau complété à la question 3)a), les seuls restes possibles pour la division euclidienne d'un carré parfait (x^2) par 7 sont **0, 1, 2 et 4**.

Par conséquent, la condition $x^2 \equiv 6 [7]$ est impossible à satisfaire.
On en déduit que **l'équation (E') n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$** .

Correction : Exercice 3 (4 points)

- 1)** Le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \frac{Cov(t, N)}{\sigma(t)\sigma(N)} \approx 0.7336$:

Arrondi à 10^{-2} près, on obtient : $r \approx 0.73$.

- 2)** On a $|r| < 0.75$, alors la corrélation entre t et N est faible . Un ajustement affine direct de N en t n'est donc pas très pertinent.

- 3)** $R = \frac{Cov(t, y)}{\sigma(t)\sigma(y)} \approx 0.99827$ Arrondi à 10^{-3} près, $R \approx 0.998$.

Interprétation : $|R| \geq 0.75$. La corrélation linéaire entre t et y est très forte. Un ajustement affine de y en t est tout à fait justifié et pertinent.

- 4) a)** L'équation de la droite est : $y = 1.03t + 0.52$.

- b)** On a $y = \ln(N) = 1.03t + 0.52 \Leftrightarrow N = e^{1.03t+0.52} = e^{0.52} \times e^{1.03t}$.

Or, $e^{0.52} \approx 1.682$. En arrondissant ce coefficient au centième, on retrouve :

$$N = 1.68e^{1.03t}$$

- 5)** Pour $t = 8$, on a :

$$N = 1.68 \times e^{1.03 \times 8} = 1.68 \times e^{8.24} = 1.68 \times 3789.544 \approx 6366.43$$

Le nombre d'ordinateurs infectés étant un entier, on estime qu'au bout de 8 heures, environ **6366 ordinateurs** seront infectés.

Correction : Exercice 4 (7 points)

Partie I

1) La fonction f est dérivable sur $] -3, +\infty[$, $f'(x) = a \cdot \ln(x+3) + (ax+b) \cdot \frac{1}{x+3} = a \ln(x+3) + \frac{ax+b}{x+3}$

- 2) a) • La courbe ($\mathcal{C}$) passe par $O(0,0)$, donc $f(0) = 0 = (a(0)+b) \ln(0+3) = b \ln 3$, d'où $b = 0$.
 • La tangente T au point d'abscisse -2 a pour équation $y = -2x - 4$. Le coefficient directeur de cette tangente est -2 , ce qui signifie que $f'(-2) = -2 = a \ln(-2+3) + \frac{a(-2)+0}{-2+3} = a \ln(1) - \frac{2a}{1} = -2a$. On a $f'(-2) = -2a$. Ainsi, $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$.

On obtient : $f(x) = x \ln(x+3)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+3) + (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+3) = +\infty$$

Interprétation graphique : La courbe ($\mathcal{C}$) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** ($O, \vec{j}$) au voisinage de $+\infty$.

c) On a : $\lim_{x \rightarrow -3^+} x+3 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x+3) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x \ln(x+3) = (-3) \times (-\infty) = +\infty$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = -3$ est une **asymptote verticale** à la courbe ($\mathcal{C}$).

Partie II

- 1) a) Graphiquement, la courbe (Γ) représentant f' coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α . Donc $f'(\alpha) = 0$.

Interprétation : La courbe ($\mathcal{C}$) de f admet une **tangente horizontale** au point B d'abscisse α .

- b) Position de Γ par rapport à l'axe des abscisses :

- Pour $x \in] -3, \alpha[$, la courbe (Γ) est en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'(x) < 0$.
- Pour $x = \alpha$, $f'(x) = 0$.
- Pour $x \in] \alpha, +\infty[$, la courbe (Γ) est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f'(x) > 0$.

- 2) D'après le signe de $f'(x)$, on a :

x	-3	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- 3) Voir le graphique

4) a) $I = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 x \ln(x+3) dx$.

Posons :

$$u(x) = \ln(x+3) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_{-2}^0 x \ln(x+3) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+3) \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+3} dx = \left(\frac{0^2}{2} \ln(3) \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} \ln(1) \right) - \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx = 0 - (2 \times 0) - \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx.$$

$$\text{On obtient bien : } I = \int_{-2}^0 f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx.$$

b) Pour tout $x \in]-3, +\infty[$, on a : $x - 3 + \frac{9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3) + 9}{x+3} = \frac{(x^2 - 9) + 9}{x+3} = \frac{x^2}{x+3}$

c) Sur l'intervalle $[-2, 0]$, on a $x \leq 0$ et $x+3 \geq 1 \Rightarrow \ln(x+3) \geq 0$.
Le produit $f(x) = x \ln(x+3) \leq 0$ sur $[-2, 0]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = -\int_{-2}^0 f(x) dx = -\left(-\frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx\right) = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{x^2}{x+3} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \left(x - 3 + \frac{9}{x+3}\right) dx$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3) \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2} \left(\left(0 - 0 + 9 \ln(3)\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 3(-2) + 9 \ln(1)\right) \right) \\ = \frac{1}{2} (9 \ln 3 - (2 + 6 + 0)) = \frac{1}{2} (9 \ln 3 - 8)$$

$$\text{L'aire (en unités d'aire) : } \mathcal{A} = \frac{9}{2} \ln 3 - 4$$

