

Exercice 1 (5 points)

1) a) $(8 - 4i)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times (4i) + (4i)^2 = 64 - 64i - 16 = 48 - 64i$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(-8 + 16i) = 16 - 4(-8 + 16i) = 16 + 32 - 64i = 48 - 64i = (8 - 4i)^2$.

Une racine carrée de Δ est $\delta = 8 - 4i$. Les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-4 - (8 - 4i)}{2} = \frac{-4 - 8 + 4i}{2} = \frac{-12 + 4i}{2} = -6 + 2i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-4 + (8 - 4i)}{2} = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-6 + 2i, 2 - 2i\}.$$

2) a) $(-2)^3 + 6(-2)^2 + 16i(-2) - 16 + 32i = -8 + 24 - 16 - 32i + 32i = 16 - 16 = 0$.

Donc, -2 est une solution de (E').

b) $(z + 2)(z^2 + 4z - 8 + 16i) = (z^3 + 4z^2 - 8z + 16iz) + (2z^2 + 8z - 16 + 32i) = z^3 + (4 + 2)z^2 + (-8 + 8)z + 16iz - 16 + 32i = z^3 + 6z^2 + 16iz - 16 + 32i$

c) L'équation (E') $\Leftrightarrow (z + 2)(z^2 + 4z - 8 + 16i) = 0$.

- $z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2$.
- $z^2 + 4z - 8 + 16i = 0 \Leftrightarrow z = -6 + 2i$ ou $z = 2 - 2i$.

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2, -6 + 2i, 2 - 2i\}.$$

3) a) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (4 + 2i) - (2 - 2i) = 2 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (-6 + 2i) - (2 - 2i) = -8 + 4i$ Donc :
 $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A}) = (2 + 4i)(-8 + 4i) = (2 + 4i)(-8 - 4i) = 2(-8) + 2(-4i) + 4i(-8) + 4i(-4i) =$
 $-16 - 8i - 32i - 16i^2 = -16 - 40i + 16 = -40i \in i\mathbb{R}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le triangle ABC est rectangle en A.

b) K est le milieu du segment [BD] : $z_K = \frac{z_B + z_D}{2} \Rightarrow 2z_K = z_B + z_D \Rightarrow z_D = 2z_K - z_B =$
 $2(-2) - (4 + 2i) = -4 - 4 - 2i = -8 - 2i$

$$z_D = -8 - 2i.$$

c) $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = (-6 + 2i) - (-8 - 2i) = 2 + 4i = z_{\overrightarrow{AB}}$
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme. De plus $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

$$\text{Aire(ABCD)} = AB \times AC = |z_B - z_A| \times |z_C - z_A| = |2 + 4i| \times |-8 + 4i| = \sqrt{20} \times \sqrt{80} = 40$$

$$\text{Aire(ABCD)} = 40$$

Exercice 2 (4 points)

1) $\text{Card}(\Omega) = C_6^2 = 15$. Le nombre de cas favorables à l'événement A (PGCD = 1) :

$$\text{Card}(A) = 2(2, 3) + 2(2, 9) + 2(4, 3) + 2(4, 9) = 8$$

donc : $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8}{15}$

2) a) L'événement $\{X = 2\}$ correspond à tirer deux boules dont le PGCD est 2. Les cas favorables sont : (2,2) et (2,4).

- Nombre de façons de tirer (2,2) : $C_2^2 = 1$.
- Nombre de façons de tirer une boule 2 et une boule 4 : $C_2^1 \times C_2^1 = 2 \times 2 = 4$.

Le nombre de cas favorables à $\{X = 2\}$ est $1 + 4 = 5$.

donc : $p(X = 2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b) Les valeurs possibles pour X sont les PGCD possibles : 1, 2, 3, 4.

- $p(X = 1) = p(A) = \frac{8}{15}$.
- $p(X = 2) = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$.
- $\{X = 3\}$: correspond (3,9). Il y a $C_1^1 \times C_1^1 = 1$ façon de tirer (3,9). Donc $p(X = 3) = \frac{1}{15}$.
- $\{X = 4\}$: correspond à (4,4). Il y a $C_2^2 = 1$ façon de tirer (4,4). Donc $p(X = 4) = \frac{1}{15}$.

Le tableau complété est :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3) a) La probabilité de succès est $p = p(A) = \frac{8}{15}$. La probabilité d'échec est $q = 1 - p = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$. Donc, la probabilité p_n est :

$$p_n = 1 - P(\text{aucun succès}) = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{7}{15}\right)^n$$

b) $p_{n+1} - p_n = \left(1 - \left(\frac{7}{15}\right)^{n+1}\right) - \left(1 - \left(\frac{7}{15}\right)^n\right) = -\left(\frac{7}{15}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{15}\right)^n = \left(\frac{7}{15}\right)^n \left(1 - \frac{7}{15}\right) = \left(\frac{7}{15}\right)^n \left(\frac{8}{15}\right) \geq 0$
 $p_{n+1} - p_n \geq 0 \implies p_{n+1} \geq p_n$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{7}{15}\right)^n\right) = 1 - 0 = 1$. Car $-1 < \frac{7}{15} < 1$, par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$.

d) $1 - \left(\frac{7}{15}\right)^n \geq 0,999 \Leftrightarrow -\left(\frac{7}{15}\right)^n \geq 0,999 - 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{7}{15}\right)^n \geq -0,001 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{15}\right)^n \leq 0,001$.

$$\ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^n\right) \leq \ln(0,001) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leq \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leq -3 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-3 \ln(10)}{\ln(7/15)} \approx 9.063$$

Le plus petit entier satisfaisant cette condition est $n = 10$.

Le plus petit entier naturel n pour que $p_n \geq 0,999$ est **10**.

Exercice 3 (5 points)

I) 1) a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 101 & 10 & -111 \end{vmatrix} = -40$

Puisque $\det(A) = -40 \neq 0$, la matrice A est inversible.

b) $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 101 & 10 & -111 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -121 & -1 \\ 10 & 323 & 3 \\ 10 & -81 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} = 40 \times I_3$.

On a : $A \times B = 40 \cdot I_3 \implies A \times \left(\frac{1}{40}B\right) = I_3$

On en déduit que $A^{-1} = \frac{1}{40}B$.

2) a) Le système (S) s'écrit $A \times X = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 101 & 10 & -111 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -353 \end{pmatrix}$$

b) $A \times X = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y = \frac{1}{40}BY = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 10 & -121 & -1 \\ 10 & 323 & 3 \\ 10 & -81 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -353 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solution du système (S) est $(x, y, z) = (2, 0, 5)$.

II) 1) La décomposition en base 10 est :

$$N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + a \times 10^1 + c \times 10^0 = 1000a + 100b + 10a + c = 1010a + 100b + c$$

2) a) $N = 1010a + 100b + c$. $N_1 = abca = 1000a + 100b + 10c + a = 1001a + 100b + 10c$.
La condition est $N_1 = N + 27$.

$$1001a + 100b + 10c = (1010a + 100b + c) + 27$$

$$1001a + 10c = 1010a + c + 27$$

$$9c - 9a = 27$$

$$c - a = 3 \implies -a + c = 3$$

b) $N_2 = caba = 1000c + 100a + 10b + a = 1000c + 101a + 10b$.
La condition est $N_2 = N + 3177$.

$$1000c + 101a + 10b = (1010a + 100b + c) + 3177$$

$$999c - 909a - 90b = 3177$$

Divisons toute l'équation par -9 pour simplifier :

$$\frac{-909a}{-9} + \frac{-90b}{-9} + \frac{999c}{-9} = \frac{3177}{-9}$$

$$101a + 10b - 111c = -353$$

- c) • **Condition 1** : $a + b + a + c = 9 \implies 2a + b + c = 9$.
• **Condition 2** : $-a + c = 3$.
• **Condition 3** : $101a + 10b - 111c = -353$.

Le système formé par ces trois équations est :
$$\begin{cases} 2a + b + c = 9 \\ -a + 0b + c = 3 \\ 101a + 10b - 111c = -353 \end{cases}$$
. C'est exactement le système (S) avec les inconnues (a, b, c) au lieu de (x, y, z) .

d) Puisque le triplet (a, b, c) est la solution du système (S), d'après la question I.2.b), on a : $(a, b, c) = (2, 0, 5)$. L'entier N est donc $N = abac = 2025$.

L'entier N cherché est 2025.

Exercice 4 (6 points)

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x^3 \ln x) = -\infty - 0 = -\infty$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^3) \ln x = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

c) $\frac{f(x)}{x} = \frac{(1-x^3) \ln x}{x} = \frac{\ln x}{x} - \frac{x^3 \ln x}{x} = \left(\frac{1}{x} - x^2\right) \ln x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - x^2 \ln x\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$

La courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$,

$f'(x) = (-3x^2)(\ln x) + (1 - x^3) \left(\frac{1}{x}\right) = -3x^2 \ln x + \frac{1-x^3}{x} = -3x^2 \ln x - \frac{x^3-1}{x} = -\left(3x^2 \ln x + \frac{x^3-1}{x}\right)$

b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

• $\ln x > 0 \iff x > 1$. • $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$. • $\ln x = 0 \iff x = 1$.

• $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) > 0 \iff x > 1$ car $x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

• $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) < 0 \iff x < 1 \iff 0 < x < 1$.

• $x^3 - 1 = 0 \iff x = 1$. Les expressions $x^3 - 1$ et $\ln x$ sont donc de même signe sur $]0, +\infty[$.

c) $f'(x) = -(3x^2 \ln x + \frac{x^3-1}{x}) = -x^2(3 \ln x + \frac{x^3-1}{x^3})$.

• Si $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$ et $x^3 - 1 < 0$. Alors $f'(x) > 0$.

• Si $x = 1$, $f'(1) = -3(1)^2 \ln(1) - \frac{1^3-1}{1} = 0 + 0 = 0$.

• Si $x \in]1, +\infty[$, $\ln x > 0$ et $x^3 - 1 > 0$. Alors $f'(x) < 0$

Conclusion :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

d) $f(1) = (1 - 1^3) \ln(1) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

3) Voir graphique ci-dessous.

4) a) Soit • $u(x) = \ln x \implies u'(x) = \frac{1}{x}$ • $v'(x) = 1 - x^3 \implies v(x) = x - \frac{x^4}{4}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e (1 - x^3) \ln x \, dx = \left[\left(x - \frac{x^4}{4}\right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^4}{4}\right) dx = \left(e - \frac{e^4}{4}\right) \ln e - \int_1^e \left(1 - \frac{x^3}{4}\right) dx = \\ &= \left(e - \frac{e^4}{4}\right) \times 1 - \left[x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \right]_1^e = e - \frac{e^4}{4} - \left(\left(e - \frac{e^4}{16}\right) - \left(1 - \frac{1}{16}\right) \right) = e - \frac{e^4}{4} - e + \frac{e^4}{16} + \frac{15}{16} = \\ &= e - \frac{e^4}{4} - e + \frac{e^4}{16} + \frac{15}{16} = -\frac{4e^4}{16} + \frac{e^4}{16} + \frac{15}{16} = \frac{15}{16} - \frac{3}{16}e^4 \end{aligned}$$

b) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e -f(x) dx = -\int_1^e f(x) dx = -\left(\frac{15}{16} - \frac{3}{16}e^4\right) = \frac{3}{16}e^4 - \frac{15}{16}$ ua.

