

Correction de l'épreuve de mathématiques en bac informatique

SESSION DE CONTROLE 2022

Rédigé par le professeur : Hammami lassaad

Exercice 1

1) a) $(1-3i)^2 = 1-2 \times 3i + (3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$.

b) $\Delta = (5+i)^2 - 4 \times 1 \times (8+4i) = 25+10i-1-32-16i = -8-6i \Rightarrow \delta = 1-3i$ donc les solutions sont : $z' = \frac{5+i+1-3i}{2} = 3-i$ et $z'' = \frac{5+i-1+3i}{2} = 2+2i$.

2) a)

b) $(z_A - z_C) \overline{(z_A - z_B)} = (1+i-3+i)(1-i-2+2i) = (-2+2i)(-1+i) = 2-2-2i-2i = -4i$

c) Comme $(z_A - z_C) \overline{(z_A - z_B)}$ est un imaginaire pur donc le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) $\text{Aff}(\overrightarrow{DC}) = 3-i-1+3i = 2+2i$ et $2 \times \text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = 2(2+2i-1-i) = 2(1+i) = 2+2i$ d'où $\text{Aff}(\overrightarrow{DC}) = 2 \times \text{Aff}(\overrightarrow{AB})$

b) on a $\text{Aff}(\overrightarrow{DC}) = 2 \times \text{Aff}(\overrightarrow{AB})$ donc $\overrightarrow{DC} = 2 \times \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc $(AB) \parallel (CD)$.

c) $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{(1-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

d) ABCD est un trapèze donc l'aire de ABCD est $= \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(AB+CD) \cdot AD}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (-3-1)^2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

Exercice 2

1) a) $\det(M) = \alpha \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2 - 2 = 3\alpha - 4$

b) M n'est pas inversible ssi $3\alpha - 4 = 0$ ssi $\alpha = \frac{4}{3}$

2) a) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + (-1).2 + 1.(-2) & 1.(-1) + (-1).(-2) + 1.(-2) & 1.1 + (-1).(-2) + 1.(-2) \\ 2.1 + (-2).2 + 1.(-2) & 2.(-1) + (-2).(-2) + 1.(-2) & 2.1 + (-2).(-2) + 1.(-2) \\ -2.1 + 1.2 + (-2).(-2) & -2.(-1) + 1.(-2) + (-2).(-2) & -2.1 + 1.(-2) + (-2).(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$M^2 + 2.M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$

b) on a $M.(M+2.I_3) = -I_3$ ssi $M.(-M-2.I_3) = I_3 = (-M-2.I_3).M$ donc $M^{-1} = -M-2.I_3$

3) a) (S) est équivalent à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ssi $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et c'est l'écriture matricielle de (S).

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-M-2.I_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ or $-M-2.I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.1 + 1.1 + (-1).(-3) \\ -2.1 + 0.1 + (-1).(-3) \\ 2.1 + (-1).1 + 0.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1) a) $2x-3(-1) = 7$ donc $(3; -1)$ est une solution de (E').

b) $2x-y = 2x-3(-1)$ équ à $2(x-3) = y+1$ équ à $y+1 = 2k$ et $x-3 = k$ équ à $x = k+3$ et $y = 2k-1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) $5^6 = 15625$ et $5^6 - 1 = 15625 - 1 = 15624 = 7 \times 2232$ donc $5^6 \equiv 1[7]$

b) $5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]$ et $5^6 \equiv 1[7]$ donc

Valeurs de n	n = 6k	n = 6k+1	n = 6k+2	n = 6k+3	n = 6k+4	n = 6k+5
Reste de 5^n par 7	1	5	4	6	2	3

3) a) $2a_n - b_n = 2 \cdot (5^n + 3) - (2 \cdot 5^n - 1) = 7$ donc $(a_n; b_n)$ est une solution de (E').

b) $a_n \wedge b_n$ divise a_n et b_n donc $a_n \wedge b_n$ divise $2a_n - b_n = 7$ donc $a_n \wedge b_n = 1$ ou $a_n \wedge b_n = 7$.

c) *Soit $a_n \wedge b_n = 7$ donc 7 divise $a_n = 5^n + 3 \Leftrightarrow 5^n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 5^n \equiv -3[7] \Leftrightarrow 5^n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n = 6k + 2 ; k \text{ entier} \Leftrightarrow n \equiv 2[6]$

*Soit $n \equiv 2[6] \Leftrightarrow n = 6k + 2 ; k \text{ entier}$ donc $5^n \equiv 4[7]$ ce qui implique que $5^n + 3 \equiv 4 + 3[7] \Leftrightarrow a_n \equiv 0[7]$ de meme

2. $5^n - 1 \equiv 2.4 - 1[7] \Leftrightarrow b_n \equiv 0[7]$ donc 7 divise a_n et b_n donc 7 divise $a_n \wedge b_n$ or $a_n \wedge b_n \in \{1 ; 7\}$ donc $a_n \wedge b_n = 7$

Exercice 4

1)a) $r(x, y) = 0,9948 ; |r(x, y)| \geq 0.75$ donc l'ajustement du nuage de points de la série (x,y) est *affine*

b) $D_{y/x} : y = 1775,5633 x + 2089,2548$

2) a) $y = 1775,5633 x + 2089,2548 = 32273,8301 \approx 32273,830$ Dinars

b) $x = 0.0006 y - 1.0579 = 0.0006 \times 30096.500 - 1.0579 = 17$ donc selon cet ajustement 30096,500 permet de former les 17 ingénieurs.

Exercice 5

$g(x) = -4x \ln(x)$

1) $g(1) = 0$

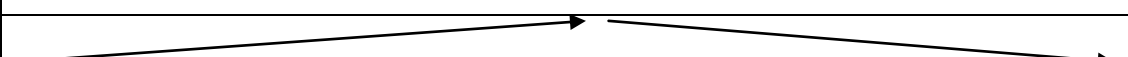
x	0	1	$+\infty$
g(x)	+	0	-

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - 2 \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2x \ln(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ et graphiquement C_f admet une demi tangente horizontale au point O(0,0).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - 2 \ln(x)) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2 \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2 \ln(x)) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2 \ln(x) = -\infty$

3) a) $f'(x) = 2x(1 - 2 \ln(x)) + x^2 \left(\frac{-2}{x}\right) = 2x - 4x \ln(x) - 2x = -4x \ln(x) = g(x)$

x	0	1	$+\infty$
f'(x) = g(x)	+	0	-
f(x)			

$f(1) = 1^2(1 - 2 \ln 1) = 1$

4) a) $f''(x) = g'(x) = -4(\ln(x) + 1) ; f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$f''(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{1}{e}$

donc le point $I\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion de C_f

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f''(x)	+	0	-

b) $\Delta : y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right)$ et comme $f'\left(\frac{1}{e}\right) = -4 \cdot \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e}$ et $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3}{e^2}$ donc $\Delta : y = \frac{4}{e}x - \frac{4}{e^2} + \frac{3}{e^2} \Leftrightarrow \Delta : y = \frac{4}{e}x - \frac{1}{e^2}$

5) a) $f(\sqrt{e}) = e(1 - 2 \ln(\sqrt{e})) = e\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$

b) voir feuille annexe .

6) $A = \int_1^{\sqrt{e}} x^2(1 - 2 \ln(x)) dx$

$u'(x) = x^2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{3}x^3$

$v(x) = 1 - 2 \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{-2}{x}$

donc $A = \left[\left(1 - 2 \ln(x)\right) \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-2}{3} x^2 dx = \left(1 - 2 \ln(\sqrt{e})\right) \frac{\sqrt{e}^3}{3} - \left(1 - 2 \ln(1)\right) \frac{1^3}{3} + \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{e}} x^2 dx$

$= 0 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{e}^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \sqrt{e}^3 - \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} e \sqrt{e} - \frac{5}{9}$