

# MATHÉMATIQUES

## Section : Sciences de l'informatique

Session de contrôle 2021

### Exercice 1 :

$$1) \text{ a) } (\sqrt{3}-i)^2 = \sqrt{3}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times i + i^2 = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } (\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \Delta = [-(\sqrt{3} + 3i)]^2 - 4 \times 1 \times (-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{3} + 3i)^2 + 8 - 8i\sqrt{3} = 3 + 6i\sqrt{3} - 9 + 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$= 2 - 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3} - i)^2$$

Donc  $\delta = \sqrt{3} - i$  une racine carrée de  $\Delta$

$$\text{D'où } Z_1 = \frac{(\sqrt{3}+3i) - (\sqrt{3}-i)}{2}$$

et

$$Z_2 = \frac{(\sqrt{3}+3i) + (\sqrt{3}-i)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}{2}$$

$$= 2i$$

$$= \sqrt{3} + i$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{C}} = \{ (2i); (\sqrt{3} + i) \}$$

$$2) \text{ a) } \overline{Z_C} \times (Z_B - Z_A) = \overline{(2i + \sqrt{3} + 1)} \times (\sqrt{3} + i - 2i)$$

$$= \overline{(\sqrt{3} + 3i)} \times (\sqrt{3} - i) = (\sqrt{3} - 3i) \times (\sqrt{3} - i)$$

$$= 3 - \sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i - 3 = -4i\sqrt{3}$$

$$\text{b) } OA = |Z_A - Z_O| = |2i| = 2$$

$$OB = |Z_B - Z_O| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc } OA = OB = 2$$

D'où les points A et B appartiennent au cercle  $\Gamma$  de centre O et de rayon 2.

$$\text{c) } Z_A = 2i \text{ donc } A \in (O, \vec{v})$$

$$Z_B = \sqrt{3} + i \text{ donc } \text{Im}(Z_B) = 1, \text{ d'où } B \in \Delta : y = 1$$

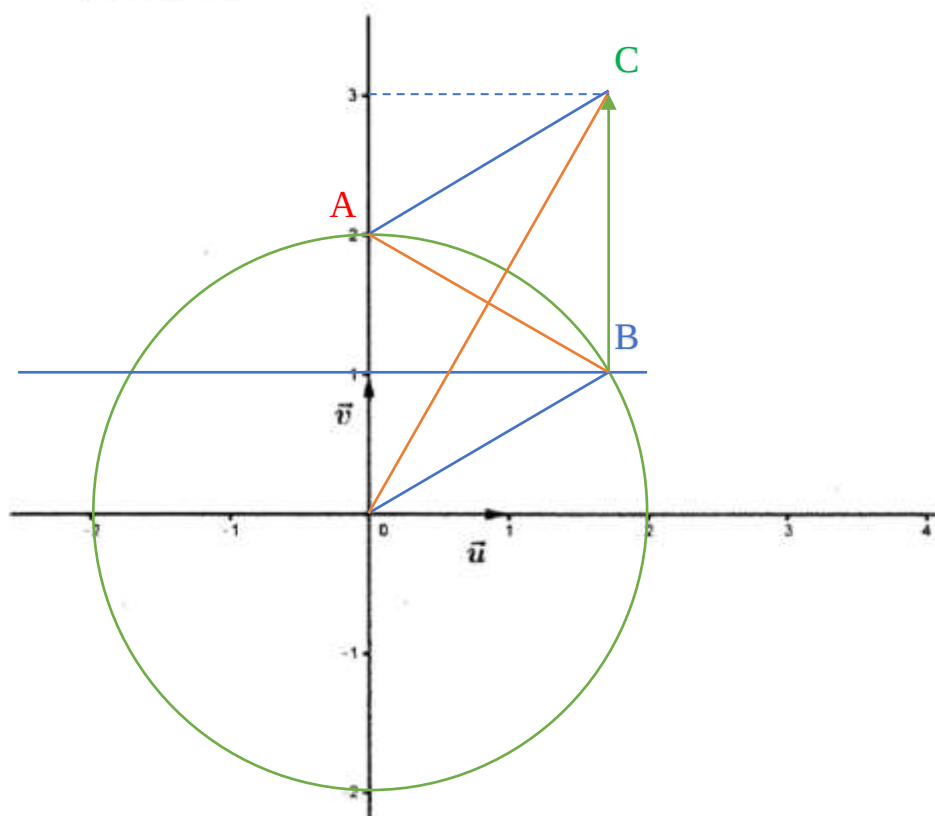
$$\text{Or } B \in \Gamma \text{ donc } B \in \Delta \cap \Gamma \text{ avec } \text{Ré}(Z_B) > 0$$

$$Z_C = Z_A + Z_B = 2i + \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + 3i$$

$$\text{Ré}(Z_C) = \text{Ré}(Z_B) \text{ et } \text{Im}(Z_C) = 3$$

**Figure 1**

**Annexe à rendre**



d)  $Z_C = Z_A + Z_B$  alors  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Donc OACB est un parallélogramme

Or  $OA = OB$  d'où OACB est un losange

3)  $|Z - 2i| = |Z - \sqrt{3} - i| \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

$$\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow F \text{ est la médiatrice du segment } [AB]$$

Or OACB est un losange donc (OC) est la médiatrice du segment [AB]

**Exercice 2 :**

1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} + 2 = \frac{1}{2} U_n - 1 + 2 = \frac{1}{2} U_n + 1 = \frac{1}{2} (U_n + 2)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} + 2 = \frac{1}{2} (U_n + 2)$

b) On a :  $U_0 = 0$  alors  $U_0 > -2$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $U_n > -2$  et montrons que  $U_{n+1} > -2$

On a :  $U_n > -2$  alors  $\frac{1}{2} U_n > -1$  donc  $\frac{1}{2} U_n - 1 > -2$  d'où  $U_{n+1} > -2$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_n > -2$

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n - 1 - U_n$   
$$= \frac{U_n - 2 - 2 U_n}{2} = \frac{-2 - U_n}{2}$$

Or On a :  $U_n > -2$  sig  $-U_n < 2$  sig  $-2 - U_n < 0$  d'où  $U_{n+1} - U_n < 0$

Ainsi la suite  $(U_n)$  est décroissante.

d) La suite  $(U_n)$  est décroissante et minorée par  $(-2)$

Donc elle est convergente vers une limite finie  $l$  tel que  $l \geq -2$

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$f$  est une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est continue en  $l$

Donc  $l$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = x \Leftrightarrow x - 2 = 2x \Leftrightarrow -2 = 2x - x \Leftrightarrow -2 = x$$

Donc  $l = -2$  Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -2$

2) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \text{Ln}(U_{n+1} + 2) = \text{Ln}\left(\frac{1}{2}U_n - 1 + 2\right) = \text{Ln}\left(\frac{1}{2}U_n + 1\right) = \text{Ln}\left(\frac{U_n + 2}{2}\right) \\ &= \text{Ln}(U_n + 2) - \text{Ln}(2) = V_n + \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc  $(V_n)$  est suite arithmétique de raison  $r = \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$

b) On a :  $(V_n)$  est suite arithmétique de raison  $r = \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$   $V_n = V_0 + n r$

Or  $(V_n)$  est de raison  $r = \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$  et premier terme  $V_0 = \text{Ln}(2)$

$$\begin{aligned} \text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } V_n &= \text{Ln}(2) + n \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) + n \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (n - 1) \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

c) On a :  $V_n = \text{Ln}(U_n + 2) \Leftrightarrow \text{Ln}(U_n + 2) = (n - 1) \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \text{Ln}(U_n + 2) = \text{Ln}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \Leftrightarrow U_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $U_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$

d)  $U_n \leq -1,99$  sig  $2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \leq -1,99$

$$\text{sig } 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 2 - 1,99 \text{ sig } 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01$$

$$\text{sig } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,005 \quad \text{sig } \text{Ln}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq \text{Ln}(0,005)$$

$$\text{sig } n \quad \text{Ln} \left( \frac{1}{2} \right) \leq \text{Ln}(0,005) \quad \text{sig } n \geq \frac{\text{Ln}(0,005)}{\text{Ln}(0,5)}$$

$$\text{sig } n \geq 7,6438561 \dots$$

A partir de  $n = 8$ ,  $U_n \leq -1,99$

### Exercice 3 :

1) a)  $5 \times 2 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$

Donc le couple  $(2, 3)$  est solution de l'équation (E).

b) On a :  $5 \wedge 3 = 1$  donc l'équation (E) admet des solutions

$(x, y)$  est une solution de l'équation (E)

$$\Leftrightarrow 5x - 3y = 10 \Leftrightarrow 5x - 3y = 5 \times 2 - 3 \times 3$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5 \times 2 = 3y - 3 \times 3 \Leftrightarrow 5(x - 2) = 3(y - 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ divise } 5(x - 2) \\ 5 \wedge 3 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Lemme de Gauss}} 3 \text{ divise } (x - 2)$$

$\Rightarrow$  il existe un entier relatif  $k$  tel que  $x - 2 = 3k$

$$\Rightarrow x = 3k + 2 \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Or } 5(x - 2) = 3(y - 3) \text{ alors } 5 \times 3k = 3(y - 3) \quad \text{donc } 5k = y - 3$$

$$\text{Donc } y = 5k + 3$$

$$5 \times (3k + 2) - 3(5k + 3) = 15k + 10 - 15k - 9 = 1$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3k + 2; 5k + 3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$$

2) a) On a :  $2021 = 5 \times 404 + 1$  donc  $2021 \equiv 1 [5]$

$$\text{On a } 2021 = 3 \times 673 + 2 \quad \text{donc } 2021 \equiv 2 [3]$$

D'où 2021 est un élément de S.

b) Le couple  $(p, q)$  vérifie  $\begin{cases} n = 5p + 1 \\ n = 3q + 2 \end{cases}$  ou  $n$  est un élément de S.

$$5p + 1 = 3q + 2 \Leftrightarrow 5p - 3q = 1$$

Donc le couple  $(p, q)$  est solution de l'équation (E).

c)  $n$  est un élément de S alors  $\begin{cases} n \equiv 1 [5] \\ n \equiv 2 [3] \end{cases}$

$$\text{Donc il existe un couple } (p, q) \text{ vérifie } \begin{cases} n = 5p + 1 \\ n = 3q + 2 \end{cases}$$

Donc le couple  $(p, q)$  est solution de l'équation (E)

$$\text{D'où } p = 3k + 2 \text{ et } q = 5k + 3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } n = 5p + 1 = 5(3k + 2) + 1 = 15k + 10 + 1 = 15k + 11$$

$$\text{Ainsi } n \equiv 11 [15]$$

$$3) \text{ a) On a : } 2021 \equiv 1 [5] \text{ donc } 2021^{2021} \equiv 1^{2021} [5]$$

$$\text{D'où } 2021^{2021} \equiv 1 [5]$$

$$\text{b) On a } 2021 \equiv 2 [3] \text{ donc } 2021^2 \equiv 4 [3]$$

$$\text{D'où } 2021^2 \equiv 1 [3]$$

$$2021^{2021} \equiv 2021^{2 \times 1010 + 1} [3] \text{ donc } 2021^{2021} \equiv (2021^2)^{1010} \times 2021^1 [3]$$

$$\text{donc } 2021^{2021} \equiv 1^{1010} \times 2 [3]$$

$$\text{d'où } 2021^{2021} \equiv 2 [3]$$

$$\text{c) On a } 2021^{2021} \equiv 1 [5] \text{ et } 2021^{2021} \equiv 2 [3]$$

Donc  $2021^{2021}$  est un élément de S

$$\text{Donc } 2021^{2021} \equiv 11 [15]$$

D'où le reste de la division euclidienne de  $2021^{2021}$  est 11

#### Exercice 4 :

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{2} x^2 = -\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{2} x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{x}{2} = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0)$$

La courbe ( C ) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de  $(-\infty)$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{2} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{2} x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

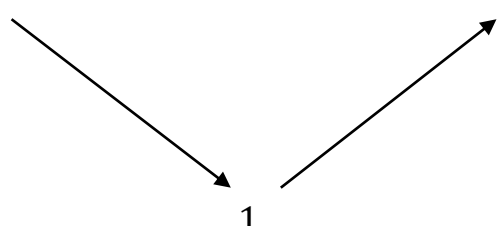
La courbe ( C ) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de  $(+\infty)$

$$2) \text{ a) Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f'(x) = e^x - x$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f''(x) = e^x - 1$$

$$\text{b) } e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$$

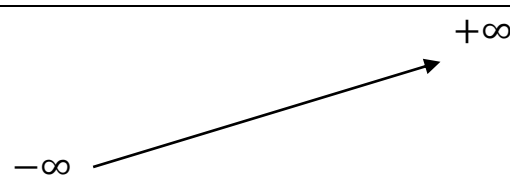
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

|          |                                                                                    |            |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|
| x        | $-\infty$                                                                          | 0          | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | -                                                                                  | $\bigcirc$ | +         |
| $f'$     |  |            |           |

$f'$  admet un minimum absolu en 0 égale a 1

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $f'(x) \geq 1$

c)

|         |                                                                                    |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| x       | $-\infty$                                                                          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                  |           |
| f       |  |           |

d) On a f est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

Donc f réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = ]-\infty; +\infty[$

Or  $0 \in ]-\infty; +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$ .

$$\text{On a : } f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\text{On a : } f(-0,8) = e^{-0,8} - \frac{1}{2} \times (-0,8)^2 > 0$$

$$\text{Donc } -1 < \alpha < -0,8$$

3) a) La dérivée seconde s'annule et change de signe en 0 et  $f(0) = 1$

Donc le point  $K(0,1)$  est un point d'inflexion de la courbe ( C )

b) Une équation de la tangente à ( C ) au point K est :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Or  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$  , donc T:  $y = x + 1$  est la tangente à ( C ) au point K.

4) a) Pour tout  $\mathbb{R}$  ,  $g'(x) = f'(x) - 1$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ,  $g'(x) \geq 0$  car  $f'(x) \geq 1$

D'où la fonction g est croissante

b)  $g(0) = f(0) - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$

$g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$

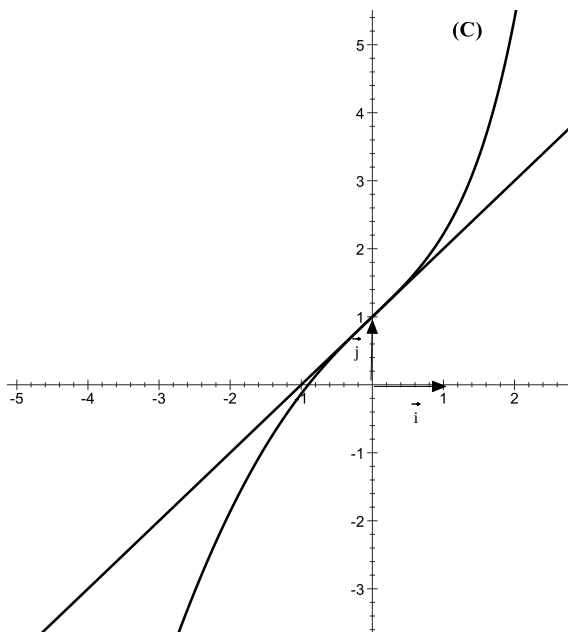
- si  $x < 0$  alors  $g(x) < g(0)$  donc  $g(x) < 0$
- si  $0 \leq x$  alors  $g(0) \leq g(x)$  donc  $0 \leq g(x)$

|      |           |        |           |
|------|-----------|--------|-----------|
| x    | $-\infty$ | 0      | $+\infty$ |
| g(x) | -         | $\phi$ | +         |

c)

|                   |           |              |           |
|-------------------|-----------|--------------|-----------|
| x                 | $-\infty$ | 0            | $+\infty$ |
| $f(x) - y = g(x)$ | -         | $\phi$       | +         |
| Position          | $T/(C)$   | $T \cap (C)$ | $(C)/T$   |

d)



$$5) \quad A = \int_{\alpha}^0 |f(x)| \, dx = \int_{\alpha}^0 f(x) \, dx = \int_{\alpha}^0 e^x - \frac{1}{2} x^2 \, dx$$

$$= \left[ e^x - \frac{1}{6} x^3 \right]_{\alpha}^0 = (e^0 - 0) - \left( e^{\alpha} - \frac{1}{6} \alpha^3 \right) = 1 - e^{\alpha} + \frac{1}{6} \alpha^3$$

Or  $f(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha^2$

Donc  $A = \frac{1}{6} \alpha^3 - \frac{1}{2} \alpha^2 + 1$  (ua)