

Exercice 1 :

1) a) on a : $(4-3i)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

et $(-4+3i)^2 = (-4)^2 + 2 \times (-4) \times 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$ et comme un nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées alors les racines carrées de $7 - 24i$ sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$.

b) $\Delta = (2-5i)^2 - 4(-7+i) = 4 - 20i - 25 + 28 - 4i = 7 - 24i = (4-3i)^2$

Donc $z' = \frac{-2+5i-4+3i}{2} = -3+4i$ et $z'' = \frac{-2+5i+4-3i}{2} = 1+i$ d'où

$S_c = \{1+i, -3+4i\}$

2a) $\overline{z_1}z_3 = (1-i)(\alpha-i\alpha) = \alpha - i\alpha - i\alpha - \alpha = -2i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$\overline{z_1}z_3 = (\overline{z_A - z_O})(z_M - z_O)$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et par suite le triangle AOM est rectangle en O.

b)

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 - z_2)}(z_1 - z_3) &= \overline{[1+i - (-3+4i)]}[1+i - (\alpha - i\alpha)] = (4+3i)[(1-\alpha) + i(1+\alpha)] \\ &= 4(1-\alpha) + 4i(1+\alpha) + 3i(1-\alpha) - 3(1+\alpha) = 4 - 4\alpha + 4i + 4i\alpha + 3i - 3i\alpha - 3 - 3\alpha \\ &= 1 - 7\alpha + i(\alpha + 7) \end{aligned}$$

c) on a : $\overline{(z_1 - z_2)}(z_1 - z_3) = \overline{(z_A - z_B)}(z_A - z_M)$

A, B et M sont alignés sigles vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\text{sig } \overline{(z_1 - z_2)}(z_1 - z_3) \in \mathbb{R} \quad \text{sig } \alpha + 7 = 0 \quad \text{sig } \alpha = -7$

Exercice 2 :

1) $5^5 = 3125 = 11 \times 284 + 1$ donc $5^5 \equiv 1[11]$ ou bien $\left. \begin{array}{l} 5^2 \equiv 25 \equiv 3[11] \\ 5^3 \equiv 125 \equiv 4[11] \end{array} \right\} \text{donc } 5^5 \equiv 12[11]$

d'où $5^5 \equiv 1[11]$

on a :

$2019 = 5 \times 403 + 4$ donc $5^{2019} = (5^5)^{403} \times 5^4$

On a : $\left. \begin{array}{l} 5^4 = 625 \equiv 9[11] \\ (5^5)^{403} \equiv 1[11] \end{array} \right\} \text{donc } 5^{2019} \equiv 9[11]$

2) a) $5 \times 1 - 3(-2) = 5 + 6 = 11$ d'où $(1, -2)$ est solution de (E).

b) On a $5x - 3y = 11$ éq $5x - 3y = 5 \times 1 - 3(-2)$ éq $5(x-1) = 3(y+2)$ (**) donc 5 divise $3(y+2)$ or $5 \wedge 3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss 5 divise $(y+2)$

par suite $y+2 = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $y = 5k - 2$; ($k \in \mathbb{Z}$)

d'après (**): $5(x-1) = 3(5k)$ donc $x = 3k + 1$; ($k \in \mathbb{Z}$)

Réciproquement, pour

$$x = 3k + 1 \text{ et } y = 5k - 2, \text{ on a } 5(3k + 1) - 3(5k - 2) = 5 + 6 = 11$$

$$\text{D'où } S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k + 1, 5k - 2) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Ou bien directement : comme (1,-2) est solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k + 1, 5k - 2) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

3) $d = \text{pgcd}(a, b)$ donc (d divise a) et (d divise b)

par suite d divise $(5a - 3b)$ d'où d divise 11

or $d > 0$, donc $d = 1$ ou $d = 11$.

4) a) on a :

$$16 \equiv 5[11] \text{ donc } 16^{2019} \equiv 5^{2019}[11] \text{ comme } 5^{2019} \equiv 9[11]$$

$$\text{alors } 16^{2019} \equiv 9[11] \text{ d'où } 3 \times 16^{2019} + 1 \equiv 28[11]$$

$$\text{par suite } 3 \times 16^{2019} + 1 \equiv 6[11]$$

Et comme $0 \leq 6 \leq 10$ alors, 6 est le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) on vérifie que $(3 \times 16^{2019} + 1; 5 \times 16^{2019} - 2)$ est une solution de (E)

d'après 3), $\text{pgcd}(3 \times 16^{2019} + 1; 5 \times 16^{2019} - 2) = 1$ ou $\text{pgcd}(3 \times 16^{2019} + 1; 5 \times 16^{2019} - 2) = 11$

or 11 ne divise pas $(3 \times 16^{2019} + 1)$ et c'est d'après 4)a) donc $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Exercice 3 :

1) a) $g(1) = 1e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

b)

X	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	-	0	+

2) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} - x$

On pose $X = x - 1$ donc $x = X + 1$ et comme $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow -\infty$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X - X - 1 = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} - x - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ avec

$X = x - 1$ donc la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) au $V(-\infty)$

c) $f(x) - (-x) = (x-1)e^{x-1}$ est du signe de $(x-1)$

ainsi : sur $] -\infty, 1[$, (C) est au dessous de Δ

sur $] 1, +\infty[$, (C) est au dessus de Δ

(C) rencontre Δ au point de coordonnées (1,-1)

$$\begin{aligned}
 3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(e^{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(e^{x-1} - \frac{x-1+1}{x-1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(e^{x-1} - 1 - \frac{1}{x-1} \right) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^{x-1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^{x-1} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{x-1} - 1 = +\infty \text{ donc (C)}$$

admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au $V(+\infty)$

$$4) \text{ a) pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} - 1 = e^{x-1} + xe^{x-1} - e^{x-1} - 1 = xe^{x-1} - 1 = g(x)$$

b)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

c) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur $f(]-\infty, 1]) = [-1, +\infty[$

or $0 \in [-1, +\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

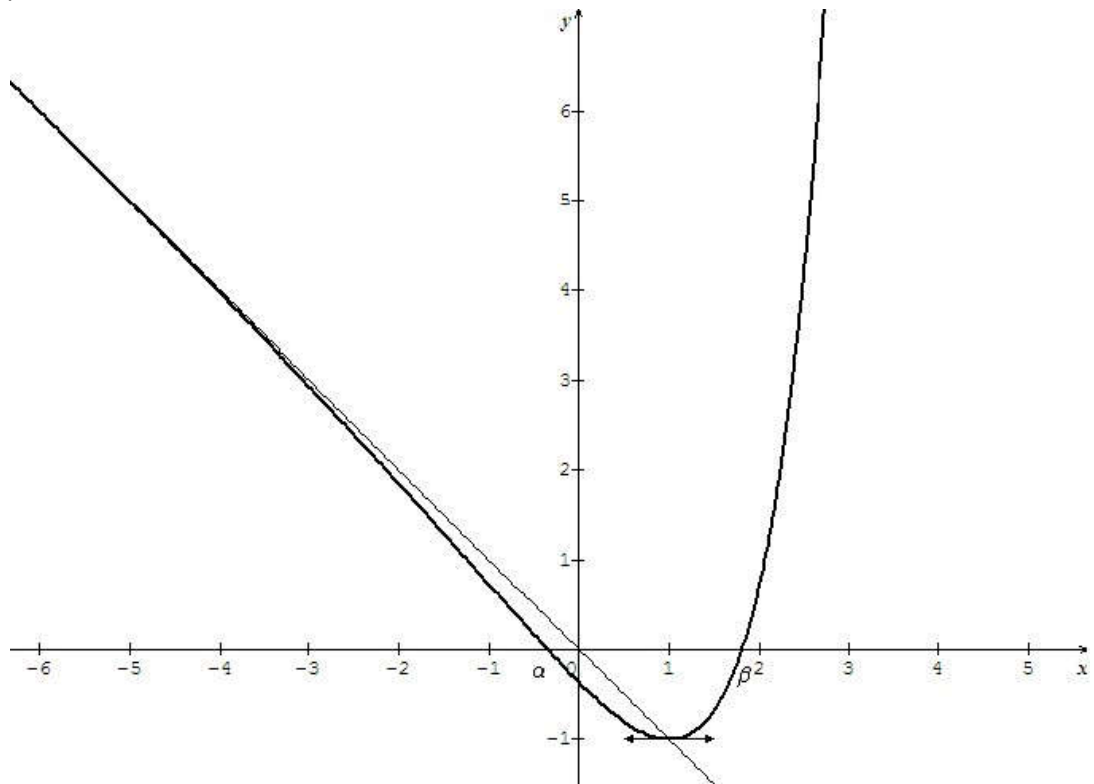
* f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$

or $0 \in [-1, +\infty[$ donc il existe un unique réel $\beta \in [1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

$$d) f(-0,4) \times f(-0,3) = 0,055 \times (-0,054) < 0 \text{ donc } \alpha \in]-0,4; -0,3[$$

$$f(1,8) \times f(1,9) = -0,019 \times 0,313 < 0 \text{ donc } \beta \in]1,8; 1,9[$$

5)



5) a) $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{-1} |f(x) - (-x)| dx = \int_{-1}^{\lambda} (x-1)e^{x-1} dx$ car (C) est au dessus de Δ sur $]-\infty, 1]$

On pose $u(x) = x - 1$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{x-1}$ $v(x) = e^{x-1}$

Les fonctions précédentes sont continues sur $[-1, \infty)$

$A(\lambda) = \left[(x-1)e^{x-1} \right]_{-1}^{\lambda} - \int_{-1}^{\lambda} e^{x-1} dx = \left[(x-1)e^{x-1} \right]_{-1}^{\lambda} - \left[e^{x-1} \right]_{-1}^{\lambda} = (\lambda-2)e^{\lambda-1} + 3e^{-2}$ (ua)

b) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (\lambda-2)e^{\lambda-1} + 3e^{-2} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \underbrace{(\lambda-1)e^{\lambda-1}}_{\searrow 0} - \underbrace{e^{\lambda-1}}_{\searrow 0} + 3e^{-2} = 3e^{-2}$ (ua)

Exercice 4 :

1) a) A l'aide de la calculatrice on obtient : $r = 0,9839$

b) $\Delta : x = 20,9t - 41946,9$

c) Pour $t_i = 2020$ on obtient $x_i = 271,1 \approx 271$ abonnés.

2) a) $r = 0,9541$

b) $r > 0,75$ donc on a une forte corrélation entre x et z et l'ajustement affine est justifié.

c) $\Delta' : z = 0,012x + 3,106$

d) $z = \ln(y) = 0,012x + 3,106$ donc $y = e^{0,012x + 3,106} = e^{3,106} e^{0,012x}$

On pose $A = e^{3,106} = 22.332$ et $B = 0,012$

3) Pour $t = 2020$ on a $x = 271$ et $y \approx 277,1$ Gb/S .