

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)

Session de contrôle 2018

Exercice 1 : (4 points)

$$1) \det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \det A = -7 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est inversible}$$

$$2)a) A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & -9 & 3 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}; \quad A^3 - A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7 I_3$$

$$c) A^3 - A^2 = -7 I_3 \text{ donc } A \left(\frac{A^2 - A}{-7} \right) = I_3 \text{ donc } A^{-1} = \frac{-1}{7} (A^2 - A)$$

$$3)a) \begin{cases} -x - 2y + z = 3 \\ x + y + z = 7 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{7} \\ \frac{16}{7} \\ \frac{43}{7} \end{pmatrix} \text{ donc } S_{IR^3} = \left\{ \left(\frac{-10}{7}, \frac{16}{7}, \frac{43}{7} \right) \right\}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

$$1)a) p(C) = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$b) p(D) = n \times \left(\frac{3}{6}\right) \times \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

$$2)a) p(A) = p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$b) p(B) = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \frac{n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$$

c) $A \cap B$: "obtenir des boules de couleurs différentes" et "obtenir ou plus une boule blanche"

donc $A \cap B$: obtenir une seule boule blanche donc $A \cap B = D$ donc $p(A \cap B) = p(D)$

$$3)a) U_{n+1} - U_n = 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) = 2^n - n - 2 - 2^{n-1} + n + 1 \\ = 2^{n-1}(2-1) - 1 = 2^{n-1} - 1$$

Or $n \geq 2$ donc $n-1 \geq 1$ donc $2^{n-1} \geq 2^1$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 2^1 - 1$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 2$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$ (U_n) est croissante

b) $U_2 = -1$, $U_3 = 0$, $U_4 = 3$ et comme (U_n) est croissante donc U_n s'annule uniquement pour $n = 3$

$$4) p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \left(\frac{n+1}{2^n}\right) \Leftrightarrow n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) (n+1)$$

$$\Leftrightarrow n = n + 1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 2^{n-1} = n + 1 \Leftrightarrow U_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$$

Exercice 3 : (5,5 points)

1)(E) : $5x - 26y = 1$

a) $5x(-5) - 26x(-1) = 1$ donc $(-5, -1)$ est une solution de (E)

b))(E) : $5x - 26y = 1$

$5x(-5) - 26x(-1) = 1$ donc $5x - 26y = 5x(-5) - 26x(-1)$

donc $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc 5 divise $26(y+1)$ or $5 \wedge 26=1$

donc 5 divise $y + 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$

26 divise $5(x + 5)$ or $5 \wedge 26=1$ donc 26 divise $x + 5$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que

$x + 5 = 26k'$ soit $x = 26k' - 5$

Réciproquement

On a $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc $5x + 26k' = 26y + 5k$ donc $k = k'$

donc $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(26k - 5, 5k - 1), k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement :

(x, y) est solution de (E) $\Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et $5x(-5) - 26x(-1) = 1$

$\Leftrightarrow 5(x + 5) = 26(y + 1) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et 5 divise $26(y + 1) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et il

existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$ car $5 \wedge 26=1 \Leftrightarrow y = -1 + 5k$ et $x = -5 + 26k$; $k \in \mathbb{Z}$

2)a) à F on associe 5 et le reste de la division euclidienne par $5x+2$ par 26 est 1 ; la lettre associée à 1 est B.

b)BAC est codé HCM

3)a) $5n + 2 \equiv m[26] \Leftrightarrow 21(5n + 2) \equiv 21m[26] \Leftrightarrow n - 10 \equiv 21m[26]$

$\Leftrightarrow n \equiv 21m + 10[26]$

b)On définit un procédé de décodage de la façon suivante :

-A la lettre que l'on veut décoder , on associe l'entier m correspondant dans le tableau

-On calcule le reste de la division euclidienne de $21m + 10$ par 26 que l'on note n

-A l'entier n , on associe la lettre correspondante dans le tableau

c) Ok est le mot dont le code est UA.

Exercice 4 : (6 points)

1) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{-1} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

C_f admet une branche parabolique de direction $(0, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

$$2)a) f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$b) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

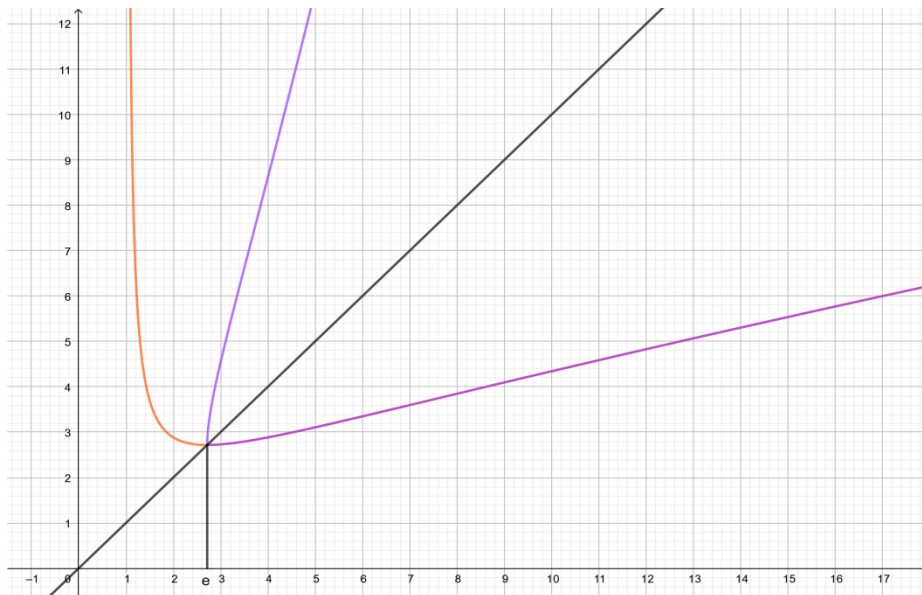
x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

$$f(e) = e$$

c) f continue et strictement croissante sur $[e, +\infty[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur

$$[f(e), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= [e, +\infty[$$

3)



$$4) \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) pour $n=0$, $U_0 = 3 \geq e$

soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geq e$ montrons que $U_{n+1} \geq e$

On a $U_n \geq e$ et f strictement croissante sur $[e, +\infty[$ donc $f(U_n) \geq f(e)$ donc $U_{n+1} \geq f(e)$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq e$

$$b) U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{U_n(1 - \ln(U_n))}{\ln U_n} \leq 0 \text{ car } U_n \geq e \text{ donc } U_{n+1} \leq U_n \text{ pour tout } n$$

donc (U_n) est décroissante

c) (U_n) est décroissante et minorée par e donc (U_n) est convergente, soit l sa limite.

$U_{n+1} = f(U_n)$ U_n est convergente vers l or $U_n \geq e$ donc $l \geq e$ donc

f est continue en l donc $f(l) = l$ donc $\ln(l) = 1$ donc $l = e$

$$5) a) \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = f'(x)$$

$$b) f'(x) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)^2 \leq 0 \text{ donc } 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

6) a) f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [e, +\infty[$

$$\textbf{I.A.F} \quad U_n \in [e, +\infty[\text{ , } e \in [e, +\infty[\text{ donc } |f(U_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4} |U_n - e|$$

$$\text{donc } |U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |U_n - e|$$

$$b) \text{ pour } n=0, |U_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}$$

soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ montrons que $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

$$\text{On a } |U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |U_n - e|$$

$$\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$$

$$\leq \frac{1}{4^{n+1}}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$

$$c) \text{ On a } |U_n - e| \leq \frac{1}{4^n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n - e = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e$$