

CORRIGE

Exercice n°1

- ✓ **Contenu** : Arithmétique : Congruence dans $\mathbb{Z}$, solutions d'une équation du type $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs, calcul du PGCD, calcul du reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- ✓ **Aptitudes visées** : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, une équation du type $ax + by = c$, déterminer le pgcd de deux entiers, décider de la divisibilité d'un nombre par un autre.
- ✓ **Corrigé** :

1)	2)	3)	4)
a	a	c	c

Exercice n°2

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes : Equation complexe du second degré, nature d'un quadrilatère.
- ✓ **Aptitudes visées** : Résoudre une équation complexe du second degré, interpréter géométriquement les affixes de points pour : déterminer la nature d'un quadrilatère (caractéristiques d'un carré).
- ✓ **Corrigé** :

1) a) Il s'agit d'un développement utilisant une identité remarquable : $(3+i)^2 = 9 - 1 + 6i = 8 + 6i$

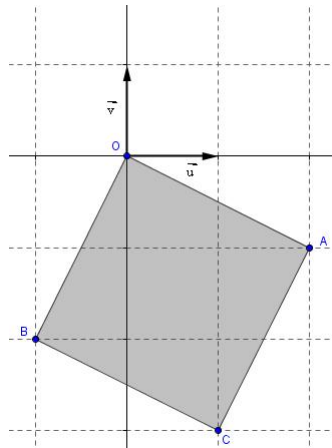
b) Il s'agit d'une équation complexe du second : (E) : $z^2 - (1-3i)z - (4+3i) = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-(1-3i))^2 - 4 \times 1 \times (-(4+3i)) = -8 - 6i + 16 + 12i = 8 + 6i = (3+i)^2$

Donc les solutions sont $z' = \frac{1-3i+3+i}{2} = 2-i$ et $z' = \frac{1-3i-3-i}{2} = -1-2i$.

$$S_C = \{ 2-i ; -1-2i \}.$$

2) a) $z_A = 2-i$, $z_B = -1-2i$ et $z_C = 1-3i$



b- $\text{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = 2-i$ et $\text{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = 1-3i+1+2i = 2-i = \text{aff}(\overrightarrow{OA})$

donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ d'où OACB est parallélogramme.

$OA = |z_A| = |2-i| = \sqrt{5}$ et $OB = |z_B| = |-1-2i| = \sqrt{5}$ donc $OA = OB$ ainsi OACB est un losange.

$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $2 \times (-1) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ et par suite OACB est un carré.

Exercice n°3

- ✓ **Contenu :** suites réelles, raisonnement par récurrence, suite géométrique, convergence d'une suite, limite d'une suite.
- ✓ **Aptitudes visées :** Montrer une proposition par récurrence, montrer qu'une suite est convergente, reconnaître une suite géométrique et ses propriétés, déterminer la limite d'une suite.
- ✓ **Corrigé :**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Utilisation du principe de raisonnement par récurrence :

* Pour $n = 0$: $u_0 = 2 < 6$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n < 6$ et démontrons que $u_{n+1} < 6$

$$u_n < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 < 6 \text{ d'où } u_{n+1} < 6$$

D'où la conclusion.

b) Sens de variation de la suite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 3 = -\frac{1}{2}(u_n - 6)$$

or $u_n < 6$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et par suite (u_n) est croissante.

c) On a : $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est majorée par } 6 \end{cases}$ donc (u_n) est convergente

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 3 \right) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \text{ d'où } \ell = 6$$

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 6$

$$\text{a) Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$$

ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

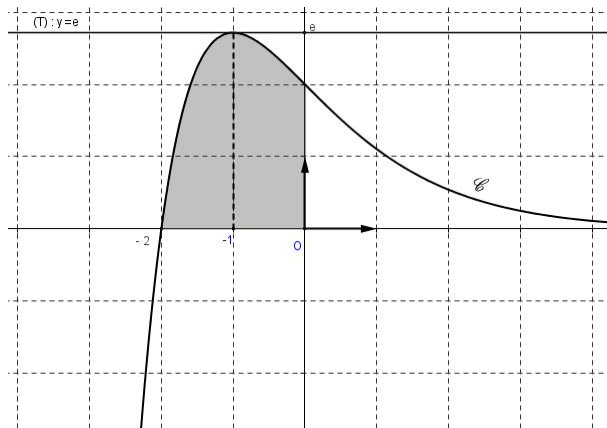
$$v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4$$

$$\text{b) } v_n = v_0 q^n = -4 \left(\frac{1}{2} \right)^n. \text{ D'autre part } v_n = u_n - 6 \Leftrightarrow u_n = v_n + 6 = -4 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 6$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ et puisque pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 6 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

Exercice n°4

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions (lecture d'une courbe), fonction exponentielle, dérivabilité, primitive d'une fonction. calcul d'une intégrale en utilisant une primitive.
- ✓ **Aptitudes visées :** lire graphiquement une courbe pour déterminer : les limites, le signe d'une fonction, calculer la dérivée d'une fonction, trouver une primitive puis calculer une aire.



- 1) a) * $f(-2) = 0$ et $f(0) = 2$: lecture graphique immédiate sur la courbe C .
 * $f'(-1) = 0$: lecture graphique de la pente de la tangente (T) (tangente horizontale)

b) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puisque l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puisque C admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

c) D'après la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses on a :

* $f(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty, -2]$

* $f(x) \geq 0$ si $x \in [-2, +\infty[$

* $f(x) = 0$ ssi $x = -2$

2) $f(x) = (x+2)e^{-x}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - (x+2)e^{-x}$

$$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = e^{-x} - f(x) \text{ donc } f(x) = e^{-x} - f'(x)$$

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$,

or d'après a) $f(x) = e^{-x} - f'(x)$ ce qui donne :

$$F(x) = -e^{-x} - f(x) = -e^{-x} - (x+2)e^{-x} = (-x-3)e^{-x}.$$

c) Soit A l'aire du domaine limité par la courbe C, les deux axes des coordonnées et la droite d'équation $x = -2$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } [-2, 0] \\ &= [F(x)]_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = -3 - (-e^2) = e^2 - 3 \quad \text{u.a} \end{aligned}$$