

Matière : Mathématiques (Corrigé)

Exercice 1 (4 points) (QCM)

- ✓ **Contenu** : Géométrie dans l'espace : alignement, positions relatives.
- ✓ **Aptitudes visées** : Décider de l'alignement de trois points de l'espace, de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs,
- ✓ **Corrigé** :

$$1) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où A, B et C ne sont pas alignés donc définissent un plan P

2)a) Faux $\begin{cases} 2 = 3 - 2a \iff a = \frac{5}{2} \\ 1 = -a \iff a = -1 \\ 3 = 1 + 3a \end{cases}$	b) Vrai $\vec{r}_D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_D = -\vec{BC}$	c) Vrai $\vec{BC} \text{ est directeur de D}$	d) Faux $\vec{r}_D \cdot \vec{AB} = -6 + 0 + 3 \neq 0$
--	---	--	---

Exercice 2 (4 points)

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées** : Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ✓ **Corrigé** :

$$1) u = \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{3 - i}{2}$$

$$2) u = 2i \iff 2i = \frac{z - i}{1 - 2i} \quad (z \neq 0) \quad z = \frac{i}{1 - 2i} = -\frac{2}{5} + \frac{i}{5} = \frac{1}{5}(-2 + i)$$

$$3) \text{1}^{\text{e}} \text{ Méthode : } |u| = 1 \iff |z - i| = |z| \text{ et } z \neq 0 \quad AM = MO \text{ avec } A(i) \text{ et } M(z)$$

D'où l'ensemble des points M est la médiatrice de $\overline{AO}$

2^e Méthode : On pose $z = x + iy$ ~~x et y réels~~

$$|z - i|^2 = |z|^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + (y-1)^2 \geq 0 \text{ d'où}$$

$$\{M(z) \mid |u| = 1\} \text{ est la droite } D : 2y - 1 = 0$$

4) Pour $z \neq 0$ on a :

$$\frac{z-i}{z} = -iz \frac{1}{z^2} + (iz^2 - i) = -\frac{3}{z} \text{ et } z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

Exercice 3 (4 points)

✓ **Contenu :** Suites réelles.

✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, détermine la limite d'une suite convergente.

✓ **Corrigé :**

1)a) $u_0 = 6 > 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$

On a $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) > 0$ d'où " $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 3$ "

b) $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}(u_n - 3) < 0$ d'où (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 3 donc elle est convergente.

c) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ qui est continue en 1 alors $f(1) = 1$ ~~$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$~~

2)a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln\left(\frac{1}{3}(u_n - 3)\right) = -\ln 3 + v_n$

d'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$ et de 1^{er} terme $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln 3$

b) $v_n = v_0 + n \cdot r = (1-n)\ln 3$

$$v_n = \ln(u_n - 3) \Leftrightarrow e^{v_n} = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} + 3 = e^{(1-n)\ln 3} + 3 = 3^{1-n} + 3$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(1-n)\ln 3} + 3 = 3 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(1-n)\ln 3} = 0$$

Exercice 4 (5 points)

✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.

✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un tableau de variation pour : donner un extrémum, une équation d'une asymptote et une équation d'une tangente - Reconnaître un point d'inflexion - Tracer la courbe d'une fonction - Calculer une aire plane.

✓ Corrigé :

1)a) f admet un maximum en 1 de valeur 2

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d'où $D : y = 0$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

c) $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ d'où $T : y = 2ex$

2)a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e}{e^x} = +\infty$,

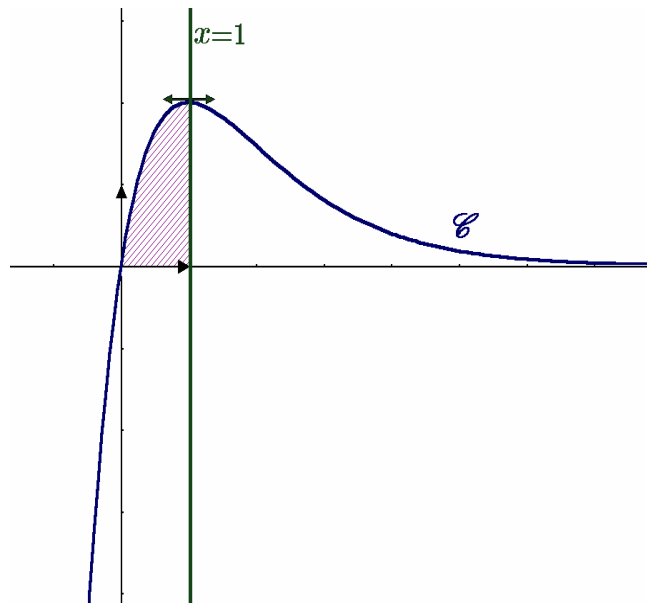
$(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (O, j)

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{(1-x)} - 2xe^{(1-x)}$,

$$f''(x) = -2e^{(1-x)} - (2e^{(1-x)} - 2xe^{(1-x)}) = (-4 + 2x)e^{(1-x)} , \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

f'' s'annule en changeant de signe au point d'abscisse 2 d'où le point $(2, f(2))$ est un point d'inflexion pour $(\mathcal{C})$

c) Voir courbe.



d) $u = xe^{(1-x)}$, $u' = 1 - u$, $v = e^{(1-x)}$, $v' = -e^{(1-x)}$

$$I = \int_0^1 xe^{(1-x)} dx + \int_0^1 e^{(1-x)} dx = -2 + e$$

$$A = 2I = (2e - 4) u.a$$

Exercice 5 (3 points)

✓ **Contenu :** Arithmétique – Géométrie dans l'espace.

✓ **Aptitudes visées :**

- Connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations du type : $ax+by=c$.
- Déterminer la position relative de deux plans.

✓ **Corrigé :**

1)a) $4 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = -8 + 15 = 7$

b) $(-2, 3)$ est une solution particulière d'où $S_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \{(-2 - 5k, 3 + 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2)a) $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{3}, \frac{6}{-1};$

$\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$ ne sont pas colinéaires donc P et Q sont sécants en une droite D.

b) Un point M de coordonnées entières (x, y, z) appartient à D si et seulement si

b) $\begin{cases} 3x + 6y - z - 8 = 0 \\ 3x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

$$\oplus \begin{array}{r} 3x + 6y - z - 8 = 0 \\ 3x - y + z + 1 = 0 \\ \hline 4x + 5y - 7 = 0 \end{array}$$

$$4x + 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y = 7 \Rightarrow \text{donc } x = -2 + 5k \text{ et } y = 3 + 4k \quad k \in \mathbb{Z}$$

On remplace dans l'équation de P, on trouve $19k - z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = 19k + 8$

d'où $\mathcal{S} = \{(x = -2 - 5k, y = 3 + 4k, z = 8 + 19k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$