

Corrigé (Mathématiques)

Section : Sciences de l'Informatique

Session de contrôle 2008

Exercice 1 :

✓ **Contenu :** Nombres complexes

✓ **Aptitudes visées :** Déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.

1)a) $OA = OB = \sqrt{2} \Rightarrow OAB$ est isocèle rectangle en A.

b) Pour que OABC soit un carré il suffit que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow -1 + i = z_C - (1 + i) \Leftrightarrow z_C = 2i$$

2)a) $(1 + i)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow (1 + i)^2 + ib(1 + i) - 2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2 - 2i}{-(1 - i)} = -2$

b) $z^2 - 2iz - 2 = 0$, $\Delta' = 1$
 $S_C = \{z_1 = 1 + i; z_2 = -1 + i\}$

Exercice 2 :

✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.

✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un tableau de variation pour : donner des asymptotes; le signe d'une fonction, des solutions d'une équation, tracer la courbe d'une fonction.

1) a) Vrai b) Vrai c) Vrai d) Faux

2)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+		-

3) a) $D_g = \{x \in D_f \mid |f(x)| \neq 0\}$

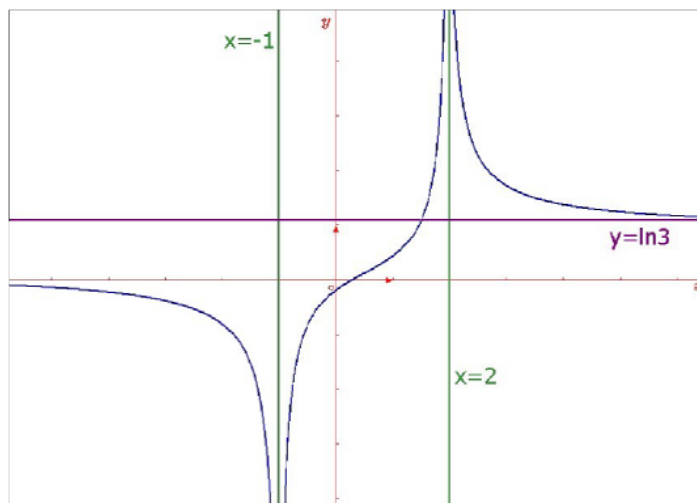
Or $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

d'où $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

b)

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	+		-
$g(x)$	0 ↘ -∞	-∞ ↗ +∞	+∞ ↘ ln3	

c)



Exercice 3 :

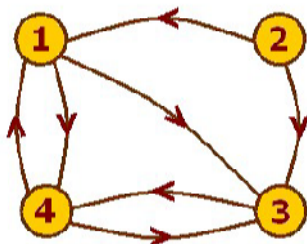
✓ **Contenu :** Graphes orientés.

✓ **Aptitudes visées :** Reconnaître un graphe à partir de sa matrice associée, reconnaître une chaîne eulérienne.

1)a) Trois arcs ; $\sum_{i=1}^4 a_{i3} = 3$ (arcs entrants)

b) Un seul arc ; $\sum_{j=1}^4 a_{3j} = 1$ (arcs sortants)

2)



3) $(2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (1)$

$(2) \rightarrow (1) \rightarrow (4) \rightarrow (1)$

Exercice 4 :

✓ **Contenu :** Arithmétique : résolution des équations du type : $ax+by=c$

✓ **Aptitudes visées :** Connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$,

Calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, des équations du type : $ax+by=c$.

1)a) $11 \times 2 - 5 \times 4 = 2$

$$\text{b) } \begin{cases} 11x - 5y = 2 \\ 11 \times 2 - 5 \times 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 11(x - 2) = 5(y - 4)$$

c) $11 \wedge 5 = 1$ donc $(x - 2) = 5k \Leftrightarrow x = 2 + 5k$ et $y = 4 + 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2 + 5k, 4 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2)a) $7a - 5b = 35n + 14 - 35n - 25 = -11$

$\text{PGCD}(a, b)$ divise -11 d'où $\text{PGCD}(a, b) = 1$ ou $\text{PGCD}(a, b) = 11$

$$\text{b) } \begin{cases} 11 \text{ divise } a \\ 11 \text{ divise } b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11a' \\ b = 11b' \end{cases} (\text{PGCD}(a', b') = 1) \Leftrightarrow 5n + 2 = 11a' \Leftrightarrow 11a' - 5n = 2$$

d'après 1) $a' = 2 + 5k, n = 4 + 11k$ $k \in \mathbb{Z}$

$$a = 11a' = 22 + 55k, b = 7n + 5 = 7(4 + 11k) + 5 = 77k + 33 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(22 + 55k, 33 + 77k), k \in \mathbb{Z}\}$$