

Exercice 1 (5 points)

1) L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Le graphe (G) a 4 sommets : A, B, C, D. Donc, l'ordre du graphe (G) est 4. Réponse : **b) 4**

2) La matrice M est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Réponse : **c)**

3) Le nombre de chaînes de longueur 3 allant de A (sommet 1) à D (sommet 4). C'est le coefficient $m_{1,4} = 2$ de la matrice M^3 . Réponse : **b) 2**

4) • Chaînes de longueur 1 de C à A : $m_{31} = 0$. Pas de chaîne de longueur 1.
• Chaînes de longueur 2 de C à A : Le coefficient $m_{3,1} = 0$ de M^2 . Pas de chaîne de longueur 2.
• Chaînes de longueur 3 de C à A : Le coefficient $m_{3,1} = 1$ de M^3 . Il existe au moins une chaîne de longueur 3. Une telle chaîne est : $C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. Sa longueur est 3.

Donc, la distance entre C et A est 3. Réponse : **b) 3**

5) Les distances sont :

De \ Vers	A	B	C	D
A	2	1	2	1
B	1	2	1	2
C	3	2	3	1
D	2	1	2	3

La plus grande de ces distances est 3. Donc, le diamètre du graphe (G) est 3. Réponse : **b) 3**

Exercice 2 (4 points)

1) a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9$.

Puisque $\det(A) = -9 \neq 0$, la matrice A est inversible.

b) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -9I_3$.

On a $A \times B = -9I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{-1}{9}B\right) = I_3$.

Donc, $A^{-1} = -\frac{1}{9}B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 7/9 & -4/9 \\ 1/3 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

2) a) Soit x le nombre de billets de 10 dinars, y le nombre de billets de 20 dinars, et z le nombre de billets de 50 dinars.

Première équation : La valeur totale des billets est 28500 dinars. $10x + 20y + 50z = 28500$. En divisant par 10, on obtient : $x + 2y + 5z = 2850$.

Deuxième équation : Le nombre total de billets est 1800. $x + y + z = 1800$.

Troisième équation : Le nombre de billets de 10 dinars (x) est le double de celui du reste des billets. Le "reste des billets" est la somme du nombre de billets de 20 dinars et de 50 dinars, c'est-à-dire $y + z$. Donc, $x = 2(y + z)$. $x = 2y + 2z$. En réarrangeant, on obtient $x - 2y - 2z = 0$. Le système (S) traduit bien la situation. Donc :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + 5z = 2850 \\ x + y + z = 1800 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

b) L'écriture matricielle est : $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2850 \\ 1800 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc le système est $AX = K$,

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 2850 \\ 1800 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Puisque $AX = K$ et que A est inversible, la solution est $X = A^{-1}K$.

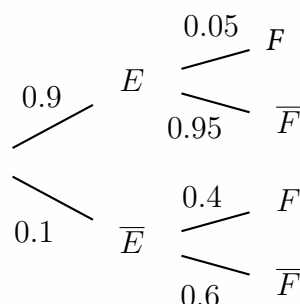
$$X = A^{-1}K \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 7/9 & -4/9 \\ 1/3 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2850 \\ 1800 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 450 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Donc, le nombre de billets est : • $x = 1200$ billets de 10 dinars. • $y = 450$ billets de 20 dinars. • $z = 150$ billets de 50 dinars.

Exercice 3 (5 points)

1) D'après l'énoncé :

- $P(E) = 0,90$ (90% utilisent le bus en aller). Donc $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,90 = 0,10$.
- $P(\bar{F}|E) = 0,95$. Par conséquent, $P(F|E) = 1 - P(\bar{F}|E) = 1 - 0,95 = 0,05$.
- $P(\bar{F}|\bar{E}) = 0,60$. Par conséquent, $P(F|\bar{E}) = 1 - P(\bar{F}|\bar{E}) = 1 - 0,60 = 0,40$.



2) **a)** $P(\bar{E} \cap F) = P(\bar{E}) \times P(F|\bar{E}) = 0,1 \times 0,4 = 0,04$.

b) Un étudiant change de moyen de transport au retour dans deux cas :

- Il prend le bus en aller (E) et le taxi en retour (F) : événement $E \cap F$.

- Il prend le taxi en aller ($\bar{E}$) et le bus en retour ($\bar{F}$) : événement $\bar{E} \cap \bar{F}$.

Ces deux événements sont disjoints. $P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap \bar{F}) = P(E) \times P(F|E) + P(\bar{E}) \times P(\bar{F}|\bar{E}) = 0,9 \times 0,05 + 0,1 \times 0,6 = 0,045 + 0,06 = 0,105$.

3) a) Les valeurs possibles pour X sont $\{1, 3.5, 6\}$.

i) Bus aller (0.5 D) et Bus retour (0.5 D) : Événement $E \cap \bar{F}$. Coût $0.5 + 0.5 = 1$ Dinar. $P(E \cap \bar{F}) = P(E) \times P(\bar{F}|E) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$. Donc $P(X = 1) = 0,855$.

ii) Bus aller (0.5 D) et Taxi retour (3 D) : Événement $E \cap F$. Coût $0.5 + 3 = 3.5$ Dinars. $P(E \cap F) = 0,9 \times 0,05 = 0,045$. Taxi aller (3 D) et Bus retour (0.5 D) : Événement $\bar{E} \cap \bar{F}$. Coût $3 + 0.5 = 3.5$ Dinars. $P(\bar{E} \cap \bar{F}) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$. Il y a deux façons d'obtenir 3.5 D. L'événement $X = 3.5$ est $(E \cap F) \cup (\bar{E} \cap \bar{F})$.

$$P(X = 3.5) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap \bar{F}) = 0,045 + 0,06 = 0,105.$$

iii) Taxi aller (3 D) et Taxi retour (3 D) : Événement $\bar{E} \cap F$. Coût $3 + 3 = 6$ Dinars. $P(\bar{E} \cap F) = 0,1 \times 0,4 = 0,04$. Donc $P(X = 6) = 0,04$.

Loi de probabilité de X :

x_i (coût en Dinars)	1	3.5	6
$P(X = x_i)$	0,855	0,105	0,040

b) $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = (1 \times 0,855) + (3.5 \times 0,105) + (6 \times 0,040) = 1,2225 + 0,240 = 1,4625$.

L'espérance est : $E(X) = 1,4625$ Dinars.

c) Le coût moyen par étudiant par jour est $E(X) = 1,4625$ Dinars. Pour 100 étudiants, le coût moyen par jour est $100 \times E(X) = 100 \times 1,4625 = 146,25$ Dinars. Pour 100 jours, le coût moyen total prévu pour 100 étudiants est $100 \times (\text{coût moyen par jour pour 100 étudiants}) = 100 \times 146,25 = 14625$ Dinars.

Autre méthode : Nombre total de déplacements = 100 étudiants $\times$ 100 jours = 10000 déplacements (aller-retour). Coût total moyen = 10000 $\times E(X) = 10000 \times 1,4625 = 14625$ Dinars.

Exercice 4 (6 points)

1) a) On a $f(x) = 3xe^{2-x} = 3xe^2 e^{-x} = 3e^2 \frac{x}{e^x}$. on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3e^2 \times 0 = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$: $f'(x) = 3 \cdot e^{2-x} + 3x \cdot (-e^{2-x}) = 3(1-x)e^{2-x}$.

c) Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(1-x)$ car $3e^{2-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $1-x > 0 \iff x < 1$. $1-x = 0 \iff x = 1$. $1-x < 0 \iff x > 1$.

$$f(0) = 3(0)e^{2-0} = 0. \quad f(1) = 3(1)e^{2-1} = 3e^1 = 3e. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$3e$	0

2) a) $f(2) = 3(2)e^{2-2} = 6e^0 = 6 \times 1 = 6.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ $f(0) = 0$. $f(1) = 3e \approx 3 \times 2,718 = 8,154$. Le nombre $k = 6$ est tel que $f(0) < 6 < f(1)$ (car $0 < 6 < 8,154$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,1]$.

c) D'après le tableau de variation :

- $x \in [0,1]$, $f(x) > 6 \iff x > \alpha$. L'ensemble solution sur $[0,1]$ est $] \alpha, 1]$.
- Sur $[1, +\infty[$, f est décroissante. On sait que $f(2) = 6$. Donc, pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) > 6 \iff 1 \leq x < 2$. L'ensemble solution sur $[1, +\infty[$ est $[1, 2[$.

L'ensemble des solutions de $f(x) > 6$ est $] \alpha, 1] \cup [1, 2[=] \alpha, 2[$.

3) a) F est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$F'(x) = (-3)(e^{2-x}) + (-3(x+1))(-e^{2-x}) = -3e^{2-x} + 3(x+1)e^{2-x} = 3xe^{2-x} = f(x).$$

Donc, F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

b) On a : $\int_1^3 f(t)dt = F(3) - F(1) = -3(3+1)e^{2-3} - (-3(1+1)e^{2-1}) = -\frac{12}{e} + 6e.$

Donc, $\int_1^3 f(t)dt = 6e - \frac{12}{e}.$

4) a) Le bénéfice est modélisé par $f(x)$ pour $x \in [0,6]$. D'après le tableau de variation, f admet un maximum en $x = 1$ sur $[0, +\infty[$. Puisque $1 \in [0,6]$, le maximum de $f(x)$ sur $[0,6]$ est $f(1) = 3e \approx 3 \times 2,71828 = 8,15484$. Donc le bénéfice maximal est 8,15484 milliers de dinars, soit 8154,84 dinars. À un dinar près par excès, le bénéfice maximal est de 8155 dinars.

b) x est en centaines de pièces. Donc, 100 pièces correspondent à $x = 1$, et 300 pièces à $x = 3$. Le bénéfice moyen sur l'intervalle $[1,3]$ (en x) est donné par la valeur moyenne de la fonction f sur cet intervalle :

$$B_{moyen} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \left(6e - \frac{12}{e} \right) = 3e - \frac{6}{e} \approx 8,15484 - 2,20728 \approx 5,94756.$$

Donc 5,94756 milliers de dinars $\approx$ 5947,56 dinars. à un dinar près par excès, le bénéfice moyen est de 5948 dinars.

c) On veut que $f(x) > 6$ (milliers de dinars). D'après la question 2.c), l'ensemble des solutions de $f(x) > 6$ est $] \alpha, 2[$. Puisque $\alpha = 0.4$, l'intervalle pour x (en centaines de pièces) est $]0.4, 2[$. Le nombre de pièces de gâteaux est $N = 100x$. Donc, $0.4 < x < 2 \implies 100 \times 0.4 < 100x < 100 \times 2 \implies 40 < N < 200$. La pâtisserie devrait produire un nombre de pièces de gâteaux compris entre 40 et 200 pour que le bénéfice dépasse 6 milles dinars.

Un encadrement du nombre de pièces N est $40 < N < 200$. (Ou si on veut des entiers $41 \leq N \leq 199$).