

Exercice 1 (5 points)

- 1 a Voir l'annexe
b Pour estimer le chiffre d'affaires en 2023 (année 10), nous prolongeons la droite de régression et calculons : pour $x = 10$, $y = 60.5$
Donc, le chiffre d'affaires en 2023 est estimé à 60.5 milliers de dinars selon l'ajustement affine.

2 a

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(y_i)$	1.39	1.61	2.08	2.53	2.89	3.31	3.69	4.01

- b Calculons les coefficients a et b de la droite de régression $z = bx + a$: $a = 0.93$ et $b = 0.39$
L'équation de la droite de régression est donc : $z = 0.39x + 0.93$
c Comme $z = \ln(y)$, nous avons :

$$\ln(y) = 0.39x + 0.93$$

En exponentiant, on obtient :

$$y = e^{0.39x+0.93} = e^{0.93} \cdot e^{0.39x}$$

Calculons $e^{0.93}$:

$$e^{0.93} \approx 2.53$$

Donc : $y = 2.53e^{0.39x}$

- d Pour estimer le chiffre d'affaires en 2023 (année 10), nous utilisons l'équation :

$$y = 2.53e^{0.39 \cdot 10} = 2.53e^{3.9} \approx 125$$

Le chiffre d'affaires en 2023 est estimé à 125 milliers de dinars selon cet ajustement.

- 3 L'ajustement affine donne une estimation de 60.5 milliers de dinars, tandis que l'ajustement non affine donne une estimation de 125 milliers de dinars. Étant donné que le chiffre d'affaires réel en 2023 est de 100 milliers de dinars, l'ajustement non affine est plus pertinent car il est plus proche de la valeur réelle.

Exercice 2 (5 points)

1 a

Sommet	A	B	C	D	E
d^+	2	2	1	1	1
d^-	2	1	1	2	1

- b Un graphe orienté admet un cycle eulérien si et seulement si chaque sommet a le même degré entrant et sortant. Or, dans le graphe (G), les sommets B et D n'ont pas $d^+ = d^-$. Donc, (G) n'admet pas de cycle orienté eulérien.
c Un graphe orienté admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il y a au plus un sommet avec $d^+ - d^- = 1$ et un sommet avec $d^- - d^+ = 1$, les autres sommets ayant $d^+ = d^-$. Ici, B a $d^+ - d^- = 1$ et D a $d^- - d^+ = 1$, donc (G) admet une chaîne eulérienne.

Exemple de chaîne orientée eulérienne : B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A $\rightarrow$ D.

2

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3

- a Le nombre de chaînes de longueur 3 arrivant au sommet B correspond à l'élément M_{iB}^3 où i varie sur tous les sommets :

$$M_{iB}^3 = \sum_{i=1}^5 M_{i2}^3 = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2$$

Donc, il y a 2 chaînes orientées de longueur 3 arrivant au sommet B .

- b Pour déterminer le nombre de chaînes orientées de longueur 7 allant de E à C , nous devons calculer la matrice $M^7 = M^3 \times M^4$. Nous pouvons multiplier la 5 ième ligne de M^3 par la 3 ième colonne de M^4 on obtient ainsi le coefficient a_{53} de la matrice M^7

$$\text{Le coefficient } a_{53} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2 \text{ de la matrice } M^7 \text{ est égale à } 2$$

Le nombre de chaînes orientées de longueur 7 allant de E à C est égale à 2 .

Ces chaînes sont :

E -> D -> C -> A -> B -> E -> D -> C

E -> D -> C -> A -> B -> A -> D -> C.

Exercice 3 (5 points)

1

a $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 170 & 85 & 215 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 85 & 215 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 170 & 215 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 170 & 85 \end{vmatrix} = -5$

Le déterminant de A est $-5 \neq 0$, donc A est inversible.

b $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 170 & 85 & 215 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -45 & 5 & 1 \\ 305 & -10 & -7 \\ -85 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Donc, $A \times B = 5I_3$, où I_3 est la matrice identité 3x3.

Puisque $A \times B = 5I_3$, nous avons $B = 5A^{-1}$, donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{5}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -45 & 5 & 1 \\ 305 & -10 & -7 \\ -85 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & \frac{1}{5} \\ 61 & -2 & -\frac{7}{5} \\ -17 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2

a L'écriture matricielle du système (S) est : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3640 \\ 1870 \\ 155700 \end{pmatrix}$

- b En utilisant l'inverse de A , nous avons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3640 \\ 1870 \\ 155700 \end{pmatrix}$$

Calculons : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & \frac{1}{5} \\ 61 & -2 & -\frac{7}{5} \\ -17 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3640 \\ 1870 \\ 155700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 320 \\ 400 \end{pmatrix}$ Donc, la solution du système est $(x, y, z) = (250, 320, 400)$.

3 Posons x, y, z les nombres de pièces fabriquées des types P_1, P_2, P_3 respectivement. Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 8x + 4y + 10z = 7280 \\ 3x + y + 2z = 1870 \\ 8.5x + 4.25y + 10.75z = 7785 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 250 \\ y = 320 \\ z = 400 \end{cases}$$

Exercice 4 (5 points)

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1-x})$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$, ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 a Les fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{1-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, +\infty[$, donc f est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est la somme de fonctions dérivables (la fonction identité et l'exponentielle). $f'(x) = (x + e^{1-x})' = 1 - e^{1-x}$

$$f'(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } 1 - e^{1-x} \geq 0$$

$$1 \geq e^{1-x} \text{ si et seulement si } e^0 \geq e^{1-x} \text{ si et seulement si } 0 \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc, $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$

Ainsi, $f'(x)$ est de même signe que $x - 1$.

b $f(1) = 1 + e^0 = 2$ et $f(0) = 0 + e^1 = e$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	e	2	$+\infty$

3 a Le gain algébrique est donné par la différence entre le revenu et le coût de fabrication.

$$g(x) = \text{revenu} - \text{coût de fabrication}$$

Le revenu est de $2000x$ dinars, soit $2x$ milliers de dinars. Le coût de fabrication est $f(x)$ milliers de dinars.

$$g(x) = 2x - f(x)$$

En utilisant l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$g(x) = 2x - (x + e^{1-x}) = x - e^{1-x}$$

b pour tout $x \in [0, +\infty[$. En utilisant l'expression de $g(x)$ et $f'(x)$:

$$g(x) = x - e^{1-x}$$

et

$$f'(x) = 1 - e^{1-x}$$

En remarquant que :

$$g(x) = x - e^{1-x} = x - 1 + 1 - e^{1-x} = (x - 1) + f'(x)$$

c On sait que $f'(x)$ est de même signe que $(x - 1)$. Donc :

- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$ et $(x - 1) > 0$, donc $g(x) > 0$.
- Si $x < 1$, $f'(x) < 0$ et $(x - 1) < 0$, donc $g(x) < 0$.
- Si $x = 1$, $f'(x) = 0$ et $(x - 1) = 0$, donc $g(x) = 0$.

Donc, $g(x)$ est positif pour $x > 1$, négatif pour $x < 1$, et nul pour $x = 1$.

d Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que $g(x) > 0$. D'après l'analyse précédente, $g(x) > 0$ pour $x > 1$. Donc, l'entreprise doit fabriquer et vendre plus de 1 centaine de pièces, soit plus de 100 pièces, pour réaliser un bénéfice.

Annexe à rendre avec la copie

