

MATHÉMATIQUES
Section : Economie et Gestion
Session principale 2021

Exercice N°1 :

$$1) \ a) \ \det(A) = \begin{vmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 21 & 12 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 21 & 12 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 32(63 - 252) - 20(189 - 252) + 12(252 - 84) = 2772$$

$\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

$$b) \ A \times B = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 189 & -63 & -168 \\ 36 & -144 & 144 \\ -336 & 420 & 196 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2772 & 0 & 0 \\ 0 & 2772 & 0 \\ 0 & 0 & 2772 \end{pmatrix} = 2772I_3$$

$$\text{On a : } A \times B = 2772I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2772} B = I_3, \text{ donc } A^{-1} = \frac{1}{2772} B.$$

2) a) On a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times X = C, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix}$$

$$b) \ A \times X = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C \Leftrightarrow X = \frac{1}{2772} B \times C$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2772} \begin{pmatrix} 189 & -63 & -168 \\ 36 & -144 & 144 \\ -336 & 420 & 196 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $S_{\mathbb{R}^3} = \{(10, 60, 80)\}$

3) On note x, y et z les prix respectifs avant réduction d'une chemise, d'un pantalon et d'un pull.

Pour le client C_1 :

$$4x \times 0,8 + 3y \times 0,7 + 2z \times 0,6 = 350 \Leftrightarrow 10(3,2x + 2,1y + 1,2z) = 350 \times 10 \Leftrightarrow 32x + 21y + 12z = 3500$$

Pour le client C_2 :

$$5x \times 0,8 + 2y \times 0,7 + 4z \times 0,6 = 436 \Leftrightarrow 5(4x + 1,4y + 2,4z) = 436 \times 5 \Leftrightarrow 20x + 7y + 12z = 2180$$

Pour le client C_3 :

$$(5x \times 0,8) \times 0,9 + (10y \times 0,7) \times 0,9 + (5z \times 0,6) \times 0,9 = 436 \Leftrightarrow 3,6x + 6,3y + 2,7z = 738$$

$$\Leftrightarrow 36x + 63y + 27z = 7380 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times (36x + 63y + 27z) = 7380 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow 12x + 21y + 9z = 2460$$

Donc la situation se traduit par le système (S):
$$\begin{cases} 32x + 21y + 12z = 3500 \\ 20x + 7y + 12z = 2180 \\ 12x + 21y + 9z = 2460 \end{cases}$$

Et par suite on aura $x = 40$; $y = 60$ et $z = 80$

Exercice N°2 :

1) a)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	2	3	2	3	2

b) Le sous graphe $\{B, C, D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 3.

c) Le nombre minimal des couleurs est le nombre chromatique du graphe (G) .

Notons $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe (G). On a :

D'une part, le plus haut des degrés des sommets est 3, alors $\gamma(G) \leq 3 + 1 \Leftrightarrow \gamma(G) \leq 4$

D'autre part, $\{B, C, D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 3, d'où $\gamma(G) \geq 3$

Par suite on a : $3 \leq \gamma(G) \leq 4$

Sommet	B	D	A	C	E
Degré	3	3	2	2	2
Couleur	c_1	c_2	c_2	c_3	c_1

On peut donc illuminer les 5 appareils par des ampoules de 3 couleurs

différentes. D'où $\gamma(G) = 3$.

- 2) Parcourir toutes les allées de ce manège sans passer deux fois par la même allée signifie que le graphe (G) comporte une chaîne eulérienne.

La chaîne A-B-C-D-E contient tous les sommets du graphe (G), donc (G) est connexe. De plus deux sommets exactement (B et D) sont de degré impair donc le graphe (G) admet une chaîne eulérienne.

Conclusion : Il est possible de parcourir toutes les allées de ce manège sans passer par la même allée.

$$3) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) a) Le nombre de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B est le terme situé à l'intersection de la ligne 5 et la colonne 2 (a_{52}) de la matrice M^5 .

On remarque qu'il y a exactement 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B qui sont : $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ / $D \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B$ / $D \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B$ / $D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B$ et $D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$

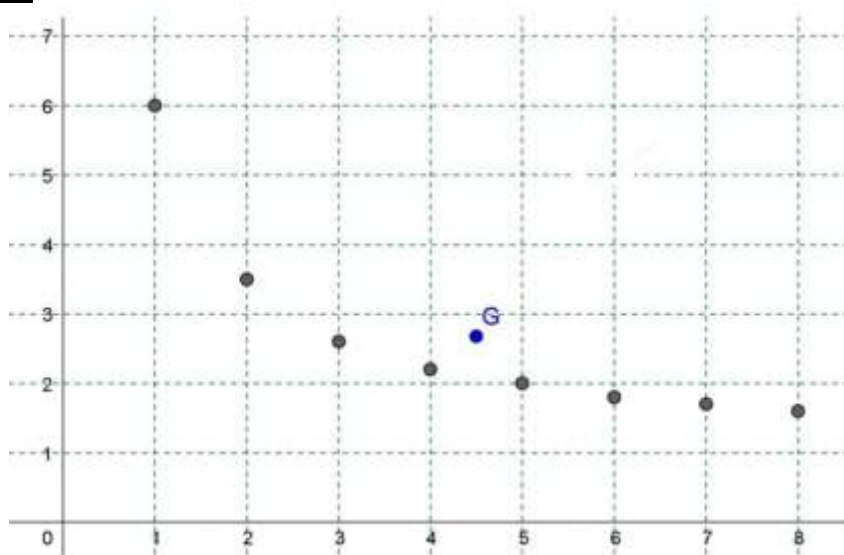
- b) La somme des termes de diagonale de la matrice M^5 est :

$1 + 5 + 6 + 6 + 2 = 20$, donc il y a 20 chaînes fermées de longueur 5

Exemples : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$.

Exercice N°3 :

- 1) a)



b) Le nuage ne permet pas d'envisager un ajustement affine car les points ne sont pas allongés autour d'une droite

c) $\bar{X} = \frac{1}{8} \sum x_i = 4,5$, $\bar{Y} = \frac{1}{8} \sum y_i = 2,675$, donc $G(4,5 ; 2,675)$

2) $r_1 = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \cong -0,836$

II)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	5	2,5	1,667	1,25	1	0,833	0,714	0,625
y_i	6	3,5	2,6	2,2	2	1,8	1,7	1,6

2) a) $r_2 = \frac{\text{Cov}(T,Y)}{\sigma(T)\sigma(Y)} \cong 1$

b) $D : y = a t + b$, avec : $a = \frac{\text{Cov}(T,Y)}{V(T)} = 1,006$ et $b = \bar{Y} - a \bar{T} = 0,966$,
Donc $D : y = 1,006 t + 0,966$

c) Pour l'année 2022 on a : $x = 11$ donc $t = \frac{5}{11} = 0,455$ par suite
 $y = 1,006 \times 0,455 + 0,966 = 1,423$

Donc les dépenses estimées en 2022 seront 1423 DT.

Exercice N°4 :

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{x-2}) = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0$)

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^{x-2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{x-2} = 0$

Donc la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$

c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) - y = -e^{x-2} < 0$ donc la courbe (C_f) est au dessous de la droite (Δ) .

2) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x \left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right) = x - e^x \times e^{-2} = x - e^{x-2} = f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x \left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right) = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2} = -\infty$, donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 1 - e^{x-2}$.

On a :

$$1 - e^{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x - 2 \leq \ln 1 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Tableau de variation de f :

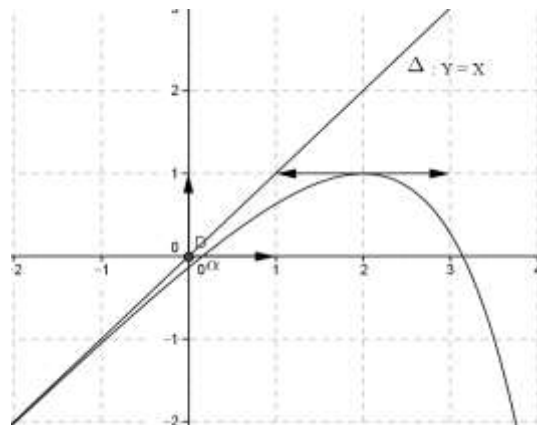
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	$-\infty$

b)

- Sur $]-\infty, 2]$, f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $f(]-\infty, 2]) =]-\infty, 1]$ et comme $0 \in]-\infty, 1]$ alors il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- Sur $[2, +\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[) =]-\infty, 1]$ et comme $0 \in]-\infty, 1]$ alors il existe un unique $\beta \in [2, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions α et β

c)



- 4) a) Le nombre de composantes produites par jour pour que le gain soit maximal est (la valeur de x pour que $f(x)$ soit maximal) $x \times 100$ qui est $2 \times 100 = 200$

Le gain est $f(2) \times 1000 = (2 - e^{2-2}) \times 1000 = 1000$ Dinars.

- b) L'entreprise réalise un gain pour $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow x \in [0,16 ; 3,15]$

Donc le nombre de composantes doit appartenir à $[0,16 ; 3,15]$